SBL0309188

FEDERIGO ENRIQUES

LE MATEMATICHE NELLA STORIA E NELLA CULTURA

prefazione di Lucio Lombardo Radice
ristampa anastatica 1982 dell'edizione 1938

DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA E SCIENZE DELL'EDUCAZIONE
INV.PHI DFE 21245

SAGGIO - CAMPIONE GRATUITO
Punto d, art. 2 D.P.R. 26.10.1972 n. 633
Punto 6, art. 4 D.P.R. 6.10.1978 n. 627
F. Enriques
Le matematiche
nella storia e
nella cultura
Zanichelli
0001757

ZANICHELLI

FMT 288

Prima edizione 1938

Edizione 1982

Copyright © 1982 Nicola Zanichelli S.p.A., Bologna

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento, totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

Ristampe:
5 4 3 2 1 1982 1983 1984 1985 1986

Stampato a Bologna
dalla Litosei, via Bellini 22/2,
per conto della Nicola Zanichelli editore S.p.A.
via Irnerio 34, 40126 Bologna

PREFAZIONE ALLA RISTAMPA ANASTATICA

di Lucio Lombardo Radice

RITORNO DI ENRIQUES

Il volume che viene ristampato dalla Casa Editrice Zanichelli nel 1971 porta, nella sua prima edizione, la data di un anno davvero fatale: la data del 1938. Sull'esemplare in possesso della Università degli Studi di Roma, Biblioteca Matematica, la data di registrazione è 20 settembre 1938. Monaco. Le prime ' leggi razziali ' del fascismo. Il divieto ai « non ariani » di pubblicare libri. Dovranno passare sette anni perché Federigo Enriques possa di nuovo far uscire in Italia scritti colla sua firma. Enriques dovrà attendere il 1945 per la edizione italiana del saggio epistemologico su *Causalità e determinismo nella filosofia e nella storia della scienza* che l'editore Hermann aveva pubblicato a Parigi nel 1941. In quei sette anni, rimosso dalla Sua cattedra di Geometria Superiore, messo al bando da ogni attività pubblica, Enriques continua ad essere serenamente operoso. Pubblica Memorie geometriche in Francia, in Belgio, in Inghilterra, in Svizzera, in Argentina, financo in Spagna. In Italia, è fuori legge. Il volume sulle *Superficie razionali*, redatto insieme al caro allievo Fabio Conforto, deve essere pubblicato nel 1939 con il solo nome del collaboratore *junior*; perché gli amici del *Periodico di matematiche* — da lui fondato! — o dell'*Archivio di cultura italiana* possano ospitare qualche Suo scritto, deve usare un falso nome (Adriano Giovannini).

1938. Si chiude un'epoca tormentatissima della storia d'Italia e di Europa, precipita la tragica crisi risolutiva che libererà i popoli — a quale prezzo! — dal nazismo e dal fascismo. 1938.

Si conclude anche, senza che Egli naturalmente se ne renda conto, il grande ciclo della armonica e molteplice operosità culturale e organizzativa di Federigo Enriques. Nei due anni di vita e di lavoro che gli saranno concessi dalla sorte dopo la liberazione di Roma (Enriques si spegnerà improvvisamente e serenamente il 14 giugno del 1946), Egli darà, sì, ancora contributi importanti, e lascerà incompiuto quel bellissimo *Democrito* che sarà pubblicato postumo per l'affettuosa intelligente cura del Suo giovane collaboratore Manlio Mazziotti. Ma è un mondo nuovo, anche culturalmente nuovo, quello che viene fuori in modo impetuoso e confuso dalla grande crisi storica, non è più il mondo di Enriques, non è più il firmamento culturale-filosofico del primo decennio del Novecento, che aveva rappresentato il cielo della cultura italiana ed europea fino — appunto — all'inizio dello sconvolgimento finale. Ebbene: Enriques, con l'aiuto e la collaborazione dell'allora trentenne Attilio Frajese, non certo di proposito ma proprio per ciò tanto più felicemente, ci dà nel Suo ultimo volume prima del forzato silenzio e della crisi generale, un panorama completo dei Suoi interessi, dei Suoi punti di approdo, delle strade che aveva aperto o contribuito ad aprire nella cultura italiana-europea. Trovo perciò molto appropriata la scelta editoriale della Casa Zanichelli, di ripubblicare *questo* volume nel 1971, nell'anno centenario della nascita di Enriques.

Nella breve Prefazione, Federigo Enriques dice che materiale preparatorio del volume sono state, oltre alle « voci » della Enciclopedia Italiana, una « serie di conferenze tenute negli anni scorsi all'Università di Roma ». Ho avuto la ventura di frequentare l'Istituto Matematico dell'Università di Roma (ora intitolato a Guido Castelnuovo) come studente, proprio in quegli « anni scorsi », tra il novembre del 1934 e il novembre del 1938, e di aver seguito attentamente i corsi e le conferenze di Enriques, e i dibattiti epistemologici interdisciplinari da Lui promossi. Ebbene, rileggendo dopo tanto tempo il volume che oggi viene ristampato, ho davvero *sentito* di nuovo la voce di quel Maestro. Il libro conserva — felicemente! — la armonica disorganicità delle lezioni di Federigo Enriques; che erano piene di parentesi, di digressioni, di battute, di distrazioni, di ritorni indietro, di col-

loqui con assistenti e allievi. Erano lezioni che già altra volta ho chiamato « socratiche » e « galileiane »; vorrei aggiungere, con qualche timore però di essere frainteso, conversazioni da « gran signore » della cultura. (Intendo definire in qualche modo la naturalezza e la spontaneità autentiche del discorso dell'Enriques, condotto con linguaggio piano e comune, e tuttavia tutto intriso di conoscenze e meditazioni su conoscenze relative a tutte le epoche e a tutti i campi di investigazione dell'umano ingegno; qualcosa come la sobrietà e disinvoltura di modi di alcuni rari vecchi aristocratici di gran classe, alla Tomasi di Lampedusa.)

In Enriques, lo steccato tra le « due culture » era stato abbattuto e bruciato; o meglio, non era mai esistito. Matematico per vocazione filosofica (per una « infezione filosofica liceale », egli disse una volta, conversando con Giuseppe Scorza Dragoni), ritornò dalla matematica ai « grandi sistemi metafisici », ai massimi problemi, scorgendo in essi un germe, una sollecitazione proveniente dalla matematica. Nemico della « filosofia dei compartimenti-stagno », ebbe fortissimo il senso della unità circolare del conoscere; e proprio i capitoli del Libro Secondo di questo volume (« Le Matematiche nella cultura ») lo testimoniano nella forma più naturale, sciolta, vivace e vissuta. Di qui, credo, il Suo fervore intellettuale senza confini di specializzazione, il Suo muoversi in tanti campi di ricerca, il Suo gusto e bisogno di farsi promotore di forme nuove di organizzazione della cultura, miranti a collegare discipline diverse. Una molteplicità che era unità, un essere maestro di specialisti in molte discipline (dalla Geometria, alla Epistemologia, alla Storia della Scienza, alla Pedagogia e Didattica), senza divenire mai Egli stesso specialista, nel senso limitativo del termine. Un « uomo del Rinascimento », insomma, in tempi antirinascimentali, Federigo Enriques portava in sé il destino del solitario e dello sconfitto, che forse non avvertiva, e del quale certo non si preoccupava, nella intensa serenità del Suo discorso con se stesso e cogli altri, nel Suo sempre «ingenuo» indagare o le figure geometriche che «vedeva» come oggetti in qualche modo dati, o il segreto cammino delle idee, o i nessi nascosti tra ricerca scien-

tifica e speculazione filosofica, o i tanti altri problemi che gli venivano incontro e che Egli (come disse una volta Charlotte von Stein a proposito di Volfango Goethe) trasformava e ravvivava in modo personalissimo non appena li faceva suoi.

Una vita quanto mai fervida e mossa e inquieta dal punto di vista intellettuale, ma senza grandi avvenimenti esterni, senza « eventi clamorosi » (come ha scritto Eugenio Giuseppe Togliatti commemorando lo scienziato nel decimo anniversario della morte).

Nato a Livorno il 5 gennaio 1871, Enriques compì gli studi secondari a Pisa, e anche a Pisa trascorse gli anni dell'Università, come allievo della Scuola Normale Superiore. Erano i grandi anni dell'insegnamento del Betti, del Dini, del Volterra, del Bianchi. Il giovane studioso, di ingegno precocissimo, conseguì la laurea a venti anni, nel 1891. A soli venticinque anni, nel 1896, fu nominato professore di Geometria all'Università di Bologna. Tra la laurea e la cattedra, quattro anni scientificamente intensissimi; un anno di perfezionamento a Pisa; un anno a Roma, colle lezioni di Luigi Cremona e l'inizio della esemplare amicizia-collaborazione con Guido Castelnuovo; qualche mese a Torino, con Corrado Segre. (Enriques profittò sempre assai più del colloquio diretto che non della lettura: la stessa *informazione* era per Lui preferibilmente comunicazione orale, « leggeva » moltissime opere attraverso la sintesi che gliene facevano amici e scolari passeggiando, o conversando nel suo studio; voleva cogliere sempre l'essenza, il filo conduttore.) Rimase a Bologna per più di un quarto di secolo: furono i grandi anni della Sua vita. Furono gli anni della creazione (con il più anziano Guido Castelnuovo e il più giovane Francesco Severi) della « geometria algebrica sopra una superficie », che collocò la « scuola italiana » all'avanguardia del progresso matematico mondiale in quegli anni. Furono gli anni della partecipazione ai Congressi filosofici: il IV Congresso filosofico internazionale, svoltosi a Bologna, è presieduto da Federigo Enriques. Furono gli anni del grande tentativo di Enriques di rompere il diaframma frapposto (e imposto) dall'idealismo di Croce e Gentile tra le due culture.

gli anni dei Suoi *Problemi della scienza* (1906), della fondazione della rivista *Scientia* (1907), della polemica con il neo-hegelismo italiano, del rapporto vario e mosso colle grandi correnti epistemologiche italiane ed europee, dal formalismo logico di Peano al convenzionalismo di Poincaré all'empirio-criticismo di Mach. Furono gli anni delle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, cioè della fondazione di una cultura matematica sistematica e moderna per gli insegnanti delle scuole secondarie; furono gli anni del grande impegno per una riforma della scuola (in particolare della Università), e non solo nell'ambito delle matematiche. Furono gli anni nei quali l'Enriques diede i Suoi primi, originalissimi contributi alla storia della scienza (soprattutto alla fine del periodo bolognese).

Dopo ventotto anni di vita a Bologna, Federigo Enriques venne chiamato dalla Facoltà di Scienze della Università di Roma, nel 1922; dapprima ricoprì la cattedra di Matematiche superiori, poi quella di Geometria superiore. Dell'allontanamento dalla cattedra per «motivi razziali» si è già detto, come si è già detto del Suo breve ritorno all'Università, e della Sua improvvisa, serena morte, il 14 giugno 1946.

Non è nostro compito, in questa breve introduzione, tentare di dare un panorama del pensiero e dell'opera di Enriques; dobbiamo soltanto cercare di aiutare il Lettore a vedere come tutta una vita di ricerca intellettuale si riflette in queste pagine, come si è già detto inconsapevolmente conclusive.

Il periodo romano fino alle «leggi razziali» (1922-1938) non era stato, ci sembra, per Enriques, così ricco come quello bolognese. Innanzitutto, per ragioni obiettive. La cultura italiana, e la sua organizzazione, avevano preso strade diverse, e opposte, a quella della sintesi tra le due culture che l'Enriques propugnava. L'idealismo aveva vinto, e la sua vittoria aveva avuto conseguenze pratiche (organizzative) di grande peso: la riforma Gentile del 1923, con una netta gerarchia di valori, anzi basata sul presupposto che *la sola* cultura è quella umanistica: il poco o nessuno spazio concesso alla storia e alla filosofia della scienza (nessuna cattedra, pochissimi Istituti speciali); la esclusione degli

scienziati-filosofi dalle «sedi» della filosofia. (Federigo Enriques era Accademico di Francia — ma non certo di Italia! — *per la classe di filosofia*; e ne era molto fiero.)

Gli anni tra il 1935 e il 1938 segnano però, a mio parere, un risveglio di speranza e di iniziativa in Enriques. Tra i molti fattori, mi pare di poterne individuare due. Primo: a Enriques viene affidato il compito di redigere alcune tra le più significative voci filosofico-scientifiche della Enciclopedia Italiana. Secondo: in Italia ritornano, come problemi di filosofia e di cultura generale, alcune grosse questioni epistemologiche, attraverso la fisica teorica, in particolare attraverso Fermi e la sua scuola. È ben vero che l'atteggiamento di Fermi è assai prudente, che egli evita di «fare» il filosofo; tuttavia, proprio secondo la veduta di Enriques, erompe una problematica filosofica implicita alla ricerca fisica stessa, e non c'è *veto* idealistico che riesca a impedire alle persone colte, scienziati *e* filosofi, di ridiscutere (per esempio) il problema filosofico del determinismo partendo dal principio di Heisenberg e dai clamorosi risultati dei «bombardamenti nucleari» della metà degli anni '30.

Proprio su *Causalità e determinismo* Federigo Enriques riprenderà il filo del Suo antico discorso filosofico, alla fine degli anni trenta. Riallacciandosi al pensiero esposto nei *Problemi della scienza*, Enriques ribadirà la sua fedeltà al determinismo, inteso però in un senso molto largo e dialettico, come « generale interdipendenza dei fenomeni ». La prima ripresa di questo discorso avviene proprio nel volume che ora si ristampa, nel Libro Secondo, dedicato a « Le matematiche nella cultura ». Dei tre libri nei quali si articola il volume, è quello che più raccomandiamo al Lettore: al matematico, perché non si rinchiuda nella sua tecnica, anzi perché non riduca mai la sua scienza a pura tecnica, al non matematico, perché colga la pregnanza filosofica (di pensiero *tout court*) della ricerca matematica. Enriques sotto i « grandi sistemi metafisici » scopre la matematica (i problemi da essa posti), e chiede al filosofo non già la applicazione della matematica ma la « chiara intelligenza » delle sue idee essenziali. Quanto al processo di matematizzazione delle scienze, che Enriques con tanto vigore sottolineava già

nel 1938, gli sviluppi degli ultimi trenta anni non solo gli hanno dato ragione, ma sono andati anzi parecchio al di là delle Sue stesse previsioni (piuttosto prudenti, per esempio, per quel che concerne l'economia).

La filosofia implicita nelle matematiche è per Enriques, così come per il Suo grande maestro Galileo, il razionalismo. Il matematico — dice Enriques — ha fede nella realtà del razionale; ha fede che i suoi « intellegibili », « le sue costruzioni non sieno giuochi arbitrari della fantasia, ma abbiano riscontro in qualche realtà più o meno vicina ». Enriques sentì con profondità, e sempre rinnovata meraviglia, il « miracolo » di una armonia razionale (di enti intellegibili) che è poi la vera armonia «naturale », quella che governa i «sensibili». Insomma, per Lui, come per Galileo, « le Matematiche » sono « ordine immanente nella Natura », la Geometria è una Protofisica. Un rapporto tra enti matematici (tra curve, superficie, varietà) era per Enriques « una verità che ci appare come qualcosa di dato », una « realtà intellegibile, data fuori del nostro pensiero »; egli perciò si richiamava ai *realisti* del Medioevo contro i nominalisti.

Enriques distingue, in un passo del libro, i matematici in « visivi » e in « astratti », e afferma che ci sono due tipi di astrazione matematica: quello « naturale », che giunge fino alle funzioni analitiche, quello « artificiale » (egli dà l'esempio di funzioni continue e mai derivabili). Non c'è dubbio che Enriques stesso fosse un « visivo », e che Egli repugnasse dalle astrazioni « artificiali ». E mi pare anche si possa dire, senza alcuna irriverenza, che i grandi « visivi », come l'Enriques, della scuola geometrica italiana, non sono stati capaci (e non potevano esserlo) di preparare una generazione di « astratti » che consolidasse, precisasse e approfondisse i risultati da loro acquisiti con metodi razionali-intuitivi. Quella generazione è cresciuta altrove, non in Italia, e per qualche decennio ha avuto un atteggiamento polemico verso i metodi «approssimativi» della scuola italiana, dell'Enriques in particolare.

Oggi però, cento anni dopo la nascita di Enriques, venticinque dopo la Sua morte, possiamo con sicurezza parlare di un

ritorno di Enriques innanzitutto nel campo della Sua ricerca specifica, nella Geometria algebrica. I più dotati giovani studiosi della terza, o quarta generazione, dopo essersi formati come « astratti » presso altri maestri, hanno scoperto nelle Memorie di Enriques (e di altri « visivi » italiani) una vera e propria miniera di idee, di metodi fecondi e penetranti, e si dedicano con slancio alla sistemazione e « traduzione astratta » di quelle intuizioni.

Ma di un ritorno di Enriques crediamo si possa parlare in un senso molto più pieno. Anche se il suo razionalismo, del resto problematico e in continua evoluzione (ricordiamo le formule del « razionalismo storico » e del « razionalismo critico » usate da Enriques), non ci pare più al centro del dibattito epistemologico, il principio enriquesiano della dialettica scienza-filosofia anima le ricerche di filosofia della scienza, rifiorite in Italia e in continuo sviluppo (ricordiamo lo stimolo e la organizzazione dati a tali ricerche da Ludovico Geymonat, le ormai non poche cattedre universitarie, le attività editoriali in questa direzione, in particolare alcune grandi Enciclopedie). Così, la idea che le matematiche, e le scienze sperimentali, debbano essere « parte integrante » degli studi umanistici, è una idea enriquesiana che ha fatto molta strada, che si è imposta a distanza di tempo dopo la temporanea sconfitta della tesi dell'unità della cultura ad opera dell'idealismo. Di più: in Enriques, questo far parte dell'umanesimo del pensiero matematico è tutt'altro che proclamazione generica. Proprio in questo volume, il Lettore troverà illustrata su molti esempi la rilevanza filosofica e culturale della ricerca matematica; tanto nella « Evoluzione delle matematiche dall'antichità al secolo XVII » (Libro Primo), quanto nelle considerazioni « Su alcuni indirizzi delle matematiche nel secolo XIX » (Libro Terzo). Mentre per quel che riguarda lo studio « dal di dentro » della matematica antica Enriques ha avuto un grande allievo, Attilio Frajese, che dopo averci dato una edizione-modello di Euclide ci prepara un Archimede, dobbiamo purtroppo constatare che in Italia è abbandonato quello studio storico-critico-filosofico della matematica moderna

o addirittura contemporanea del quale Enriques dà un saggio eccellente, appunto nel Libro Terzo di questo volume.

E ci sembra giusto e doveroso rammentare che Attilio Frajese, oltre che grande allievo e continuatore originale delle ricerche storiche del Maestro, fu a Lui vicino con amore filiale nelle ore più difficili, prodigandosi ed esponendosi per Lui con generosità e coraggio.

Ritorno di Enriques. Certo, non ritorno puro e semplice dei risultati, dei metodi, delle idee di Enriques così come Egli li aveva elaborati trenta, o cinquanta, o settanta anni fa. Ritorno di *tutta* la problematica, però, che Enriques aveva (con geniale anticipo sulla realtà culturale italiana) sollevato: geometrica, filosofica, epistemologica, storica, pedagogica, didattica. Possiamo perciò rileggere, trentatrè anni dopo la sua comparsa, *Le matematiche nella storia e nella cultura,* come un libro *nuovo,* al quale i progressi e le crisi del pensiero e della realtà nazionale ed europea hanno dato più spiccato rilievo e più vivo colore.

Lucio Lombardo Radice

Roma, marzo 1971

FEDERIGO ENRIQUES

LE MATEMATICHE
NELLA STORIA
E NELLA CULTURA

LEZIONI PUBBLICATE PER CURA DI

ATTILIO FRAJESE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1938

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

PREFAZIONE

Che cosa sono, che cosa importano i problemi delle Matematiche? Donde ci vengono? Quale significato hanno in confronto alle altre scienze e alla cultura in generale? Per riguardo alla tecnica, all'arte, alla storia, alla filosofia?

Sono domande a cui non può restare indifferente chi pensa: nè il giovane studioso che si avvicina alle porte del Tempio, nè il profano che s'interessa comunque ai valori dello spirito. Per questi il mistero di cui le Matematiche sembrano circondarsi è motivo tanto più forte a tentare di comprenderne qualche cosa, anche se il pudore dell'ignoranza si nasconda talvolta dietro un ostentato dispregio.

Per rispondere alle precedenti domande in maniera accessibile al maggior numero, mi è parso che si abbia prima di tutto ad esporre in breve la storia del pensiero matematico traverso i secoli, così da chiarire l'origine e lo sviluppo delle questioni che esso persegue. E, in secondo luogo, convenga esaminare e discutere partitamente del significato stesso delle Matematiche e dei rapporti che legano l'attività matematica alle altre attività della mente umana.

A questi scopi tendevano già in parte alcuni articoli di divulgazione che ho pubblicato nell'Enciclopedia Italiana, in corrispondenza alle voci: Matematiche, Geometria, Meccanicismo, Infinito, Naturali scienze, Assioma, Definizione, Dimostrazione, Postulati, ecc.; e poi ancora una serie di conferenze

tenute negli anni scorsi all'Università di Roma. Tutta la materia così predisposta è stata ripresa, fusa ed elaborata in questo volume, coll'aiuto del prof. Attilio Frajese, che mi ha reso possibile di compierne la preparazione.

Il volume si compone di tre parti.

La prima porge un rapido compendio della storia delle Matematiche dalle origini fino al termine del secolo decimottavo, coll'avvento del Calcolo infinitesimale. L'esposizione, quanto è possibile elementare, si rivolge a chi possiede quel minimo di cognizioni matematiche che vien fornito dalla Scuola media.

La seconda parte tratta del significato e del posto delle Matematiche nel quadro delle scienze, nella tecnica, nella filosofia e nella cultura in generale. Essa mira altresì ad approfondire e chiarire la psicologia delle Matematiche e dei matematici, dando ragione dei motivi d'accordo e di contrasto della mente matematica colle altre mentalità, storica ed artistica.

La terza parte, che suppone un grado di preparazione più elevato, si rivolge soprattutto ai nostri studenti che hanno compiuto il primo biennio di studi universitarii, per spiegar loro il senso di alcuni indirizzi delle Matematiche pure nel secolo decimonono, e quindi l'origine e il significato generale dei problemi di cui andranno ad apprendere gli sviluppi nei corsi specializzati del secondo biennio.

Per questi studenti, e per i giovani studiosi che cercano di orientarsi nel vasto campo delle ricerche matematiche contemporanee, il nostro volume reca, secondo criterii di scelta che non pretendono di essere impersonali, assai larghe indicazioni bibliografiche, così da porgere anche per questo lato una guida, tanto a chi voglia approfondire la sua cultura nel senso della storia della scienza, quanto a chi aspiri alla ricerca propriamente scientifica.

Offrire ai giovani una guida siffatta mi sembra tanto più necessario nell'attuale momento storico, che è dominato da

un intenso accrescimento delle tecniche particolari, onde i rami delle Matematiche si differenziano fra loro fino a rendersi inintelligibili ai cultori di rami diversi. In tal guisa, togliendosi sempre più la veduta dell'unità del pensiero, vi è a temere, sopra ogni cosa, che si offuschi anche il senso dei valori, da cui dipende la direzione dei progressi e quindi l'avvenire della scienza.

Per il contributo recato a questa pubblicazione ringrazio, oltre il citato prof. Attilio Frajese, anche il prof. Fabio Conforto, che colla sua erudizione — eccezionalmente larga per un giovane — ci ha aiutati sopratutto per la bibliografia, e accanto a lui i valorosi dott. Giuseppe Pompili e Sandro Faedo.

FEDERIGO ENRIQUES

Libro Primo

L'EVOLUZIONE DELLE MATEMATICHE DALL'ANTICHITÀ AL SECOLO XVIII

Capitolo I.

LE MATEMATICHE NELL'ANTICHITÀ

1. - Le matematiche preelleniche

Le matematiche sono antiche, si può dire, come la civiltà: gli studi più recenti degli storici intorno alla cultura degli Egiziani e dei Caldei hanno messo in luce che quei popoli dovevano possedere già importanti conoscenze matematiche in un'epoca precedente forse di due millenni gl'inizi della scienza greca. L'impulso a tali conoscenze sembra essere venuto da tre ordini di questioni:

1°) Gli scambi commerciali portano naturalmente a sviluppare l'Aritmetica come « arte dei calcoli » o « logistica »: arte che — secondo Erodoto — I Greci avrebbero appresa dai Fenici.

2°) L'agrimensura catastale pone il problema delle aree delle figure piane, che risponde al senso etimologico della parola « geometria »; e di qui appunto lo stesso Erodoto fa nascere la scienza geometrica presso gli Egiziani, che sarebbero stati maestri dei Greci.

3°) Un'altra sorgente di ricerche geometriche (misure di angoli e relativi calcoli) sembra riattaccarsi particolarmente all'Astrologia coltivata fin da tempi remotissimi presso i Caldei.

Tavolette che risalgono a 2500 o forse a più di 3000 anni av. C. attestano qualche conoscenza della nota relazione fra il quadrato della diagonale e i quadrati dei lati del rettangolo fra i Babilonesi; altre tavolette, più recentemente scoperte dal Neugebauer, mostrerebbero, presso quei popoli, il possesso di regole per la risoluzione dei sistemi di equazioni

di 2° grado a due incognite. D'altra parte il cosidetto papiro di Mosca, interpretato dallo Struve, darebbe notizia di antichissime conoscenze geometriche possedute dagli Egiziani: in particolare vi si trova il volume della piramide e della sfera, che la Grecia ha dovuto riscoprire soltanto nel IV e III secolo, con Democrito e Archimede. C'è anche un'altra testimonianza delle conoscenze matematiche degli Egiziani avanti il 3000 a. C.: cioè le misure dei loro monumenti e in ispecie della Grande Piramide. Le lunghezze dei lati sono approssimate a 13 mm., cioè a meno di 1/14.000, gli angoli a 12″, cioè 1/27.000. Gl'ingegneri dei Faraoni erano riusciti a stabilire un unico piano di livellazione, inclinato leggermente da sud a nord, per tutti i nilometri dal mare alla prima cateratta, cioè per varie centinaia di chilometri.

2. - Le origini delle Matematiche presso i Greci

Abbiamo rilevato gl'indizi di un'attività scientifica creativa presso i popoli che circondano il mondo greco, che si costituì più tardi l'erede della loro coltura. Ma all'epoca in cui i Greci si affacciano appena alla civiltà, la scienza orientale sembra caduta in un periodo di decadenza, in cui si conservano i resultati acquisiti soltanto come ricette pratiche: regole di calcolo o di misura, adoperate ormai senza ricercarne le ragioni.

Invece, le prime conoscenze geometriche ed aritmetiche che i Greci apprendono dai loro vicini diventano subito per essi argomento di riflessione e di speculazione razionale. « I Traci e gli Sciti — dirà Platone nella *Repubblica* (435 e.) — sono governati dalle passioni. Solo fra i popoli più evoluti si sveglia l'amore della conoscenza; ma è ancor soffocato dalla cupidigia della ricchezza presso i Fenici e gli Egiziani ». Occorre aggiungervi lo spirito disinteressato che cerca la verità per sé stessa, come accade per la gioia della contemplazione artistica presso gli Elleni: e questo è il « miracolo greco ».

Talete di Mileto, intorno al 600 a. C., importa dall'Egitto le prime conoscenze di geometria e di astronomia e, al tem-

po stesso, si avventura già a formulare un'ipotesi cosmogonica, facendo dell'*acqua* il principio di tutte le cose. ANASSIMANDRO di Mileto affronta subito i più formidabili problemi dell'Universo, ponendo al posto dell'*acqua* di Talete una sostanza primitiva *infinita*, capace di diffondersi per lo spazio e d'identificarsi con esso, la quale, differenziandosi, darebbe origine a innumerevoli mondi coesistenti e successivi. Nelle sue argomentazioni — per esempio dove dà ragione del perchè la Terra resti isolata nello spazio senza cadere — appare non solo una ricca fantasia poetica, che si spiega ingenuamente urtando in difficoltà profonde di cui non ha il più lontano sospetto, sì anche la logica diritta di un intelletto matematico [1].

Nella generazione successiva, un altro cittadino della Ionia, PITAGORA di Samo, lasciata la patria intorno al 540 a. C., andava a costituire una scuola scientifico-religiosa nell'Italia meridionale; e qui troviamo per la prima volta il termine *matematica* (τὰ μαθηματικά da μάθημα « insegnamento ») nel senso di « disciplina » o « scienza razionale ». Infatti la scuola pitagorica poneva il problema di spiegare tutte le cose, partendo dal *numero* che ne costituirebbe l'essenza.

3. - INIZII DELL'ARITMETICA E DELLA GEOMETRIA

Per comprendere come l'Aritmetica potesse assumere per i Pitagorici un significato cosmologico, convien dire che (almeno per i primi discepoli di Pitagora) i numeri (interi o naturali) erano concepiti, non già nel senso astratto che ci è familiare, bensì in una maniera più concreta, che tuttavia oltrepassa la semplice nozione del « numero concreto », quale si presenta nel computo degli oggetti: p. es. quando si parla di « 7 bovi » o di « 5 sassi ».

Ricollegandosi alla tradizione ionica del problema della materia, i Pitagorici avevano cercato infatti di spiegarne la natura, immaginando che la sostanza primitiva di Anassi-

---

[1] Cfr. ENRIQUES e DI SANTILLANA, *Storia del pensiero scientifico*. Vol. I, Bologna, Zanichelli 1932.

mandro (origine di tutte le cose) si condensi intorno a dei centri monadici, che per ogni specie di materia presenterebbero una certa configurazione caratteristica. In questo senso le cose sono « numeri », cioè gruppi di punti, o corpuscoli, aventi una certa estensione, e disposti secondo un certo ordine geometrico: dalla quantità e dall'ordine di codeste particelle costituenti, la materia stessa ritrae le sue proprietà. E pertanto il numero è, nella sua vera accezione, « numero figurato », triangolare o quadrato o rettangolo, ecc., le cui unità o « monadi » sono, ad un tempo, punti geometrici e fisici.

Non è qui il luogo per spiegare come la dottrina pitagorica si collegasse a talune semplici osservazioni o scoperte che la scuola ebbe a fare fin dagl'inizii della sua attività, specie nel campo dell'Acustica; ma giova rilevare esplicitamente che codesta dottrina aveva, non soltanto un valore fisico, sì anche geometrico: la linea veniva rappresentata come una « serie di punti successivi » e analogamente si dica delle superficie e dei solidi.

Tale rappresentazione si affaccia assai naturale ad un'intelligenza non diffidente e suggerisce subito l'idea della misura. A quanto sembra, i Pitagorici partirono appunto da questa per costruire una teoria della similitudine delle figure; sulla quale doveva essere basato il corpo di scienza che essi edificarono, dando per la prima volta alla geometria un ordine deduttivo, per salire dal possesso di casi particolari noti, alla verità generale del cosiddetto *teorema di Pitagora*.

Ma nella stessa scuola si affacciò presto la scoperta imbarazzante delle grandezze incommensurabili: lato e diagonale del quadrato. « Eccezione scandalosa » siccome fu considerata dapprima da quegli antichi geometri, essa doveva suscitare una critica più profonda del significato degli enti geometrici, quale si esprime colla filosofia di PARMENIDE e di ZENONE d'Elea, conferendo alla scienza un vero assetto razionale; e d'altra parte segnava una trasformazione del pensiero pitagorico: che, continuando a spiegare le cose coi « numeri », ebbe a dare alla spiegazione un significato ana-

logico e simbolico, intinto di quel misticismo che fin da principio troviamo mescolato alle speculazioni della scuola. Un secolo dopo Pitagora, Filolao diceva che « tutte le cose conosciute posseggono un numero, e che nulla noi possiamo comprendere o conoscere senza di questo ».

Frattanto il metodo deduttivo — che, come abbiamo accennato, dovette per la prima volta mettersi in opera per giungere ad una dimostrazione generale del teorema di Pitagora — dava, in breve tempo, larghi frutti. Nel corso di un secolo e mezzo i Pitagorici svolsero le matematiche e si accinsero a costituire un corpo di scienza che comprendeva: 1°) l'aritmetica; 2°) la musica, come studio dei rapporti fra numeri connessi colle armonie dei suoni; 3°) la geometria piana; 4°) la sferica, preludio della geometria solida e soprat tutto introduzione dell'astronomia.

Questa classificazione delle scienze matematiche — aritmetica, musica, geometria, astronomia — si ritrova presso PLATONE, e poi nel tirocinio scolastico del Medio Evo, sotto il nome di *quadrivio*, in contrapposto al *trivio* (grammatica, rettorica e dialettica).

Per quel che riguarda i resultati raggiunti, oltre all'aver messo in luce le proprietà fondamentali ed anche talune proprietà curiose dei numeri, i Pitagorici sembrano avere scoperto quasi tutti i *fatti* notevoli che formano oggetto della nostra geometria elementare del piano: similitudine delle figure e risoluzione dei problemi di trasformazione o applicazione delle aree, che rispondono ad equazioni di 2° grado, costruzione dell'esagono e del pentagono regolari, ecc. Tantochè, verso il 450 a. C. IPPOCRATE di Chio (siccome ci narra Eudemo in Proclo) poteva comporre, per la prima volta, il corpo delle nozioni acquisite, in un libro di « Elementi ».

4. - CRITICA DEI PRINCIPII

Al progresso delle conoscenze geometriche si accompagna il progresso della critica, iniziata — come si è detto — colla revisione filosofica dei concetti nella scuola d'Elea. La veduta razionale del « punto » senza dimensioni (non più

« punta acuminata » στιγμή, ma « segno » σημεῖον), e analogamente della linea senza larghezza e della superficie senza spessore, porta invero un duplice ordine di conseguenze:

1°) da una parte pone il problema filosofico della realtà di « enti puramente intelligibili », che non possono cadere sotto i sensi;

2°) d'altra parte apre la via alla concezione dell'infinito e ai problemi che vi si riattaccano.

Convien dire che quest'ordine d'idee s'incontra necessariamente sul cammino della geometria, tostochè si cerchi di risolvere, al di là del caso dei poligoni, il problema delle aree. Certo occorre già una più o meno consapevole visione infinitesimale, per poter affermare che i cerchi sono proporzionali ai quadrati dei raggi, come sapeva IPPOCRATE di Chio. ZENONE d'Elea, col suo argomento « l'Achille », scoprì o dette occasione a scoprire la somma della progressione geometrica: $1+q+q^2+\dots=\frac{1}{1-q}$ (per $q<1$).

Poco dopo (cioè verso il 400 a. C.) DEMOCRITO d'Abdera trovava che il volume della piramide è un terzo del prisma colla stessa base ed altezza; la dimostrazione euclidea del teorema (modificata secondo lo schema del procedimento d'esaustione d'Eudosso) lascia ritenere che questo resultato fosse raggiunto da lui proprio mediante la somma di una progressione geometrica.

Ma certo, accanto ai resultati fruttuosi, apparivano anche i pericoli a cui l'uso dell'infinito espone i pensatori meno acuti, e gli abusi a cui esso può dar luogo. Queste difficoltà reagiscono sul problema filosofico della realtà degli intelligibili, che si dibatte allora fra razionalisti e empiristi.

Alla tesi empirica di PROTAGORA, che vede nelle linee soltanto delle strisce sensibili, si contrappone il razionalismo di DEMOCRITO e di PLATONE, che affermano la realtà delle idee di là del sensibile, polemizzando contro il maestro della Sofistica. L'effetto di questa polemica, per quel che concerne la scienza, è di acquistare più chiara consapevolezza del suo carattere razionale e di dare incremento alla critica logica rigorosa dei principii.

« I geometri — dice Platone (*Repubblica*, 510, c, d, e) — si valgono di figure visibili e ragionano su di esse, non ad esse pensando ma a quelle di cui sono l'immagine; ragionano dunque sul quadrato in se stesso e sulla sua diagonale, anzichè su quello o quella che disegnano; e così tutte le figure che formano o disegnano, quasi ombre specchiate dall'acqua, tutte le adoperano come rappresentazioni, cercando di vedere attraverso di esse i loro originali, che non sono visibili se non dall'intelligenza idealizzatrice... » (διάνοια).

E parimente della scienza dei numeri afferma che deve insegnarsi ai futuri reggitori della Città « non alla volgare maniera, occupandosene a scopo di compra-vendita, come mercanti e rivenditori, ma in guisa che l'intelligenza loro possa contemplare la vera natura dei numeri », poichè questo insegnamento « innalza l'anima e la obbliga a ragionare intorno ai numeri considerati in sè, non accettando di ragionare se altri ricorra a numeri associati a corpi visibili e tangibili » (*Rep.*, 525, c).

Una siffatta concezione delle matematiche esprime, e a sua volta avvalora, lo spirito critico che tende ad un ordine logico della scienza, da cui si esclude rigorosamente ogni uso dell'intuizione o dell'osservazione sensibile. Platone affermava questo ideale in un senso assoluto, domandando che tutta la scienza fosse costruita su semplici definizioni o assiomi logici senza valersi di postulati:

« (*Rep.*, 533, c) La geometria e le scienze annesse sognano rispetto all'esistente, ma è impossibile che lo vedano ad occhi aperti finchè si valgono di postulati e li tengon fermi, senza poterseli spiegare ».

È un ideale della perfezione matematica, che si ritrova nel pensiero moderno fino a Leibniz; ma già i geometri del IV secolo a. C. dovettero rendersi conto di ciò che esso contiene d'impossibile, sicchè la critica loro intese piuttosto a mettere in luce — fin dove riuscirono a scoprirli — i postulati intuitivi su cui l'edificio viene costruito.

Mentre da una parte si trovavano e classificavano nuove classi d'irrazionali, Teeteto d'Atene stabiliva con rigore i teoremi dell'aritmetica (decomposizione dei numeri in fattori

primi, ecc.) che occorrono per la dimostrazione di codeste irrazionalità; e EUDOSSO di Cnido, colla teoria generale delle proporzioni e col metodo d'esaustione per la valutazione delle aree, riusciva a sistemare l'uso dell'infinito, riconducendolo a semplici diseguaglianze: ciò che, sia pure in una forma più ristretta, risponde al medesimo spirito portato dai critici moderni nella revisione dei principii dell'Analisi infinitesimale.

5. - LE OPERE CLASSICHE: EUCLIDE

Da tutto il movimento della critica del secolo IV a. C., attraverso una successione di trattati di cui ci resta soltanto il nome, esce fuori nel nuovo ambiente scientifico di Alessandria (verso il 300 a. C.), la grande opera di esposizione e di sistemazione della geometria, e anzi della matematica antica: gli *Elementi* d'EUCLIDE.

Questo trattato, che fino a pochi anni or sono veniva adoperato senz'altro come testo scolastico in Inghilterra e in Italia, è universalmente noto, almeno per quanto concerne i primi sei libri, detti *planimetrici*. Tutto l'ordine delle dimostrazioni è sostenuto dai *termini* o definizioni, dai *postulati* (aventi, in genere, un significato costruttivo esistenziale) e dalle *nozioni comuni* o *assiomi*: e la maggior parte di questi principii sono enunciati come introduzione al libro I. Soltanto la critica approfondita degli ultimi cinquant'anni è riuscita veramente a comprendere il grado di perfezione raggiunto dal geometra antico e ciò che rimane ancora di manchevole nella sua analisi dei principii intuitivi della geometria: i postulati nascosti che egli non ha esplicitamente rilevati.

Il libro I contiene le relazioni di eguaglianza e diseguaglianza dei triangoli, i teoremi sulle parallele, la somma degli angoli interni d'un triangolo, l'eguaglianza dei parallelogrammi o dei triangoli d'egual base ed altezza, e — come conclusione — il teorema di Pitagora sui quadrati costruiti sull'ipotenusa e sui cateti del triangolo rettangolo. Il libro II insegna l'*algebra geometrica*, conducendo fino alla risoluzione — sotto forma geometrica costruttiva — delle

più semplici equazioni di 2° grado; la teoria verrà poi completata nel libro VI (prop. 28, 29). Il libro III svolge la teoria del cerchio: intersezioni e contatti, e soprattutto angoli iscritti in uno stesso arco. Nel IV si trova la costruzione dei poligoni regolari iscritti o circoscritti al cerchio: triangolo, esagono, quadrato, pentagono e pentadecagono. Il libro V, che nella mente dei Greci ha carattere più generale come organo della scienza matematica, reca la teoria delle grandezze e delle proporzioni secondo Eudosso, cioè — sotto forma geometrica — il calcolo dei numeri reali (razionali ed irrazionali); tantochè questo calcolo, nel suo assetto moderno che vien dato dalla dottrina degli irrazionali di R. DEDEKIND, traduce soltanto un nuovo aspetto del libro euclideo.

Nel libro VI si trovano le applicazioni geometriche delle proporzioni.

I seguenti libri VII, VIII, IX, sono dedicati all'aritmetica: proporzioni fra numeri interi, massimo comun divisore e minimo comune multiplo, decomposizione dei numeri interi in fattori primi, ed anche numeri notevoli secondo i Pitagorici.

Il libro X contiene — sempre sotto forma geometrica — una teoria degli irrazionali resultanti dall'estrazione di radicali quadratici sovrapposti: esso s'inizia col procedimento del massimo comun divisore, criterio generale di riconoscimento della incommensurabilità, e procede ad una classificazione estremamente elaborata, che prelude agli studi moderni dei corpi algebrici. Ed è importante rilevare che appunto dallo studio di questa teoria hanno ricevuto impulso gli algebristi italiani del secolo XVI, risolutori dell'equazione cubica, siccome vedremo nel seguito.

Infine i libri XI, XII e XIII svolgono le teorie elementari della geometria solida che, nell'ultimo libro, ha come coronamento la costruzione dei poliedri regolari. L'assetto di queste teorie è, in generale, meno perfetto in confronto alla geometria piana, sicchè la stereometria ha dovuto subire nell'età moderna (e specie per opera della scuola francese alla fine del sec. XVIII e agli inizi del XIX) rimaneggiamenti più profondi. Vi si trovano tuttavia cose bellissime: per esempio le determinazioni del volume della piramide, dei ci-

lindri e dei coni, la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei raggi e delle sfere ai cubi dei raggi. Manca la determinazione del rapporto, π, fra la circonferenza e il diametro, che è stato sistematicamente calcolato da Archimede, e manca altresì la ricerca del volume e della superficie della sfera, che furono scoperti anch'essi mezzo secolo dopo Euclide, dallo stesso Archimede.

Tale è il disegno generale del trattato che, tramandandosi di secolo in secolo, è giunto a noi traverso innumerevoli edizioni e commenti. Le osservazioni intorno ad esso dei critici antichi (ARCHIMEDE, APOLLONIO, GEMINO, ecc.) ci sono riferite da scrittori greci ed arabi (PROCLO, TEONE smirneo, ANARIZIO). E le nuove edizioni con relativi commenti cominciano subito all'uscire dal Medio Evo, che aveva messa da parte l'opera come troppo difficile. Basti citare: CAMPANO (che sembra risalire al 1280 e viene stampato a Venezia nel 1482), ZAMBERTI (1516), TARTAGLIA (1543), PÉLETIER (1557), CANDALLA (1566), CLAVIO (1574), CATALDI (1613-25), BARROW (1655), ecc. La serie si prosegue fino ai nostri giorni, in cui appaiono i commenti di TODHUNTER, SIMON, HEATH, ENRIQUES [1].

6. - ARCHIMEDE E APOLLONIO

Accanto alla sistemazione della geometria elementare il secolo III a. C. ha veduto pure il pieno sviluppo di alcune teorie, i cui inizii risalgono già al IV e al V secolo. In primo luogo la determinazione di aree e volumi che costituisce l'analisi infinitesimale degli antichi. Quest'ordine di idee ha toccato il punto più alto nell'opera di ARCHIMEDE di Siracusa; il quale non soltanto ci ha dato, come innanzi è detto, il calcolo di π, il volume e la superficie della sfera, e poi anche l'area del settore parabolico, ecc., ma tali dottrine ha collegato alla Statica e in ispecie al concetto dei « momenti ».

---

[1] Cfr. *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, col concorso di diversi collaboratori, editi da F. ENRIQUES, Bologna, Zanichelli, 1924-36.

Un'operetta recentemente ritrovata, il *Metodo* [1] ci fa penetrare assai profondamente nello spirito creatore di questo genio matematico, le cui idee sono state fecondate soltanto diciotto secoli più tardi dai fondatori del moderno Calcolo infinitesimale.

Un altro ordine di ricerche, che viene sistemato in un trattato organico da APOLLONIO di Perga (nato verso il 262 a. C.), si riferisce alle coniche — ellisse, iperbole, parabola — il cui studio era stato iniziato da MENECMO, condottovi dai problemi di 3° grado (duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo) che i Greci ebbero ad incontrare di buon'ora, avvertendo la difficoltà (e presentendo l'impossibilità) di scioglierli con costruzioni elementari di rette e cerchi.

In tal guisa, alla fine del secolo III, si raccolgono i frutti maturi di tutto il lavoro costruttivo delle matematiche greche, venendo organizzata, accanto alla geometria elementare, anche la geometria superiore degli antichi. E si scorge altresì la più alta visione della scienza, che, nella mente di Archimede, si volge da una parte all'ideale platonico del rigore e della bellezza, e dall'altra si estende alle applicazioni tecniche, per le quali il siracusano è passato alla storia come ingegnere del re Gelone e soprattutto come inventore di straordinarii ordigni guerreschi nella difesa della sua città, assediata dai Romani.

7. - LE MATEMATICHE ELLENISTICHE

I secoli successivi dell'epoca ellenistica hanno aggiunto alla scienza matematica alcuni resultati interessanti di per sè o per i germi che contengono di progressi futuri, ma non danno nulla di comparabile alle opere classiche di Euclide, Archimede e Apollonio. Sia perchè decada nelle menti il puro ideale estetico, sia per una più matura consapevolezza delle esigenze della vita pratica, le Matematiche si volgono ora verso le applicazioni. Uno spirito pratico e tecnico par di

---

[1] Cfr. E. RUFINI, *Il « Metodo » di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichità*. Bologna, Zanichelli, 1926.

vedere, fino nella critica delle definizioni geometriche e in tutto l'indirizzo degli studi di Erone il meccanico, ovvero nei problemi suggeriti dall'astronomia di Ipparco (sec. II e. v.) e più tardi di Claudio Tolomeo. Fra le acquisizioni che ne derivano segnaliamo particolarmente la *trigonometria*, nata come « calcolo delle corde » degli archi circolari: alle corde gli Arabi (seguendo gli Indiani) sostituiranno, quindi, le semicorde degli archi doppi, cioè i « seni » (termine che deriva dalla corruzione e quindi dalla sbagliata traduzione di una voce araba). Ma, col linguaggio delle corde, già Tolomeo conosce e adopera il teorema d'addizione, $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, che figura per lui come « lemma » relativo al quadrilatero iscritto nel cerchio.

Accanto allo studio di qualche linea notevole, o a complementi dei teoremi classici, spuntano anche nuovi problemi, come quello degli isoperimetri (Zenodoro), che nell'epoca moderna si proseguirà col calcolo delle variazioni. Ma soprattutto s'innalza sulla produzione di questo periodo l'aritmetica di Diofanto, che ci rivela un aspetto meno noto della scienza greca, cioè la trattazione numerica delle equazioni, e che — in maniera geniale — pone e risolve problemi da cui prenderanno origine i nuovi sviluppi dell'analisi indeterminata e della teoria dei numeri.

Le matematiche ellenistiche realizzano anche notevoli progressi nelle operazioni del calcolo numerico (per esempio nella estrazione dei radicali, ecc.), che del resto erano già maneggiate con abilità da Archimede. Ma accanto a questo indirizzo pratico, gli ultimi secoli vedono una decadenza dell'intelletto matematico e anche un ritorno alla mistica dei numeri, massimamente nei circoli neo-pitagorici e neo-platonici (Nicomaco, sec. II e. v.; Teone alessandrino, sec. IV; Proclo, sec. V).

8. - Decadenza

La coltura greca, mantenutasi ed estesasi per circa tre secoli nel mondo unificato dai Romani, precipita, nel terzo secolo dell'era volgare, in una decisa decadenza. A poco a

poco le menti che non sanno più accrescere il patrimonio della scienza ereditata, diventano anche incapaci a conservarla. Gli sforzi in questo senso si esprimono nell'opera dei commentatori e dei dossografi; che, smarrita ormai l'intelligenza scientifica, ci danno sempre più magri ed oscuri compendi.

Al decadere della scienza propriamente detta si accompagna anche il regredire dalla mentalità razionale alla mentalità cabalistica e mistica, che affiora col neoplatonismo, nelle pratiche alchemiche, associate al culto dell'astrologia, secondo uno spirito teurgico e magico.

Questi circoli filosofici si trovarono poi in contrasto col Cristianesimo nascente, tantochè ad essi si appoggia la reazione di Giuliano l'Apostata. Ed a tali circostanze verosimilmente si deve che il nome « matematici » venga quind'innanzi a significare una classe di cabalisti, indovini o magi, che è fatta oggetto di spregio, di terrore e di persecuzioni da parte del Cristianesimo trionfante. « Il buon Cristiano — dice S. Agostino — deve guardarsi dai matematici e da tutti coloro che si danno alle empie divinazioni, soprattutto se le loro previsioni riescono vere, per tema che codesta gente, d'accordo coi demoni, inganni il suo spirito e stringa la sua persona nei lacci di un patto diabolico » (*De Genesi ad litteram*, libro 2°, XVII, 37).

La letteratura che i Romani lasciano a tramandare le matematiche nel Medio Evo, appare estremamente esigua; e così accade che le scienze del quadrivio discendano, nei primi secoli di questa età, al più basso livello. Perduta l'intelligenza della lingua greca, rimanevano infatti, come documenti delle matematiche, soltanto i meschini compendi contenuti nelle enciclopedie della bassa latinità, fra cui era tenuta come oracolo l'opera di Marciano Capella, « Le nozze di Mercurio colla filologia », che appartiene circa alla metà del secolo V. Invero i Romani non hanno mai avuto interesse speculativo per le matematiche; la geometria, per esempio, era da loro considerata per le sue applicazioni all'agrimensura, e in questo senso coltivata dai cosidetti *gromatici*. Solo alla fine dell'epoca romana — sotto il regno di Teodorico —

MANLIO SEVERINO BOEZIO (480-524) ha dato alcune traduzioni dell'Euclide, dell'aritmetica e della musica di Nicomaco. E queste traduzioni vengono poi sunteggiate nelle « Saeculares Lectiones » di AURELIO CASSIODORO SENATORE (490-580).

Capitolo II.

I NUOVI MOTIVI DELLE MATEMATICHE NEL MEDIO EVO

9. - Le Matematiche nell'alto Medio Evo

Così povere fonti di sapere bastavano ai bisogni di una civiltà decaduta, come quella dell'Occidente cristiano nei secoli di nera miseria dell'alto Medio Evo. Da Cassiodoro, traverso Isidoro di Siviglia, attinse i « Compendii » Beda il Venerabile, di York nelle isole britanniche (673-735), dalla cui scuola doveva uscire Alcuino, che Carlo Magno condusse con sè a Parigi per fondarvi l'Accademia Palatina. Beda s'interessava specialmente alle operazioni dell'Aritmetica, che egli voleva insegnare col calcolo digitale, e poi a taluni problemi del calendario relativi alle feste mobili, che la Chiesa ha bisogno di determinare. Alcuino ha proseguito questi studi ed ha lasciato delle esercitazioni di aritmetica *ad acuendos iuvenes*: una raccolta di questioni curiose e divertenti, che sono state tramandate fino a riapparire nei libri più recenti.

Ma il risveglio intellettuale dell'accademia carolingia ebbe vita effimera, che presto si spegne con Scoto Eriugena; e per trovare qualche cosa d'interessante per le matematiche bisogna giungere fino a Gerberto, che divenne papa Silvestro II (909-1003). Una tradizione, veramente assai discussa, vuole che Gerberto abbia studiato nelle scuole arabe di Siviglia e di Cordova. Comunque egli appare capo di quella scuola di *abacisti*, che introducono l'uso delle cifre indiano-arabe, ma non ancora sanno trarne profitto per eseguire praticamente le operazioni, come poco dopo appresero a fare gli *algoritmisti*, mercanti — specialmente italiani — che al con-

tatto cogli orientali si sono resi conto del significato delle convenzioni relative allo *zero* e al valore di posizione delle cifre, per sostituire l'abbaco nel calcolo numerico.

Gerberto si è anche occupato di geometria. Egli conosce le regole trasmesse dagli agrimensori romani e alcune proposizioni, male ordinate, dell'Euclide. Offrire queste senza chiarimenti — dice lo ZEUTHEN [1] — è come dare sassi per pane. Ed infatti l'intelligenza di Gerberto, che si spiega con una certa freschezza, per esempio in una nuova definizione dell'angolo da cui deriva il concetto moderno, riesce appena a superare le questioni più ingenue. Si domandava che cosa significasse il teorema euclideo che « la somma degli angoli interni d'un triangolo è eguale a due retti » e se angolo « interno » volesse dire « acuto ». Oppure se il vero valore del rapporto del lato della diagonale al lato del quadrato sia piuttosto 7/5 o 17/12. Gerberto stesso ebbe ad accorgersi che si tratta soltanto di approssimazioni della $\sqrt{2}$. In tal guisa cominciava a sentirsi, nei circoli della Chiesa e in contatto colla cultura araba della Spagna, quanto mancava alle conoscenze geometriche, ricevute senza rigore, come regole pratiche, sulla base dell'esperienza.

10. - MATEMATICHE INDIANE

Mentre la tradizione della scienza e del pensiero greco si era andata sempre più affievolendo e quasi perdendo nell'Occidente cristiano, un altro popolo l'aveva raccolta e, traverso ai rapporti intensificati colle Crociate, la riportava all'Europa, aggiungendovi alcuni motivi, che prendono origine dalla cultura dell'India. Per intendere l'ufficio che gli Arabi hanno avuto nel rinascimento scientifico europeo, conviene dire qualcosa dello sviluppo delle matematiche in questo paese.

Non è il caso di risalire ad un'età primitiva in cui la scienza indiana ha potuto influire su quella nascente dei Greci. Nel III secolo a. C., in seguito alle conquiste di Ales-

---

(1) *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter*, in « Die Kultur der Gegenwart », T. 3, Ab. I, Berlino e Lipsia, 1912.

sandro il Macedone, le matematiche greche — che si trovano ormai ad un livello superiore — penetrano nell'India e vi sono, fino a un certo punto, assimilate [1]; non però secondo lo spirito teorico del rigore classico, ma con senso pratico, che elabora piuttosto il calcolo approssimato e ne perfeziona i metodi. In tal guisa s'introducono nello sviluppo della scienza nuovi motivi, che gli Arabi cercheranno di assimilare e di fondere coi motivi della scienza greca, preparando la sintesi che viene offerta dalle nostre matematiche moderne.

Il perfezionamento dei metodi di calcolo raggiunto dagli Indiani, si collega prima di tutto al sistema di numerazione decimale, che — come si è accennato — essi ebbero ad inventare. In questo sistema, nove cifre significative e lo zero permettono di scrivere tutti i numeri, comunque alti, mercè il valore di posizione che ad esse si attribuisce. E, ciò che più importa, sui numeri scritti in tal guisa si possono effettuare facilmente le operazioni dell'aritmetica, senza bisogno di ricorrere alle immagini dei numeri stessi, quali sono date dagli abbaci. Si comprende dunque che tale sistema abbia sviluppato grandemente la facoltà del calcolo numerico e così ne abbia reso fruttuose le applicazioni.

Non si hanno notizie precise sul momento in cui s'introduce nell'India il sistema di numerazione decimale; ma esso s'incontra già in un trattatello del IV o V secolo dell'era volgare, il *Surya Siddhanta*. L'operosità matematica degli Indiani incomincia, per lo scopo astronomico, già alla fine del II secolo dell'era volgare, con ARYABATTA.

Alla virtuosità dei calcoli si accompagna, presso gli Indiani, il senso dello sviluppo formale, onde trae origine l'uso dei numeri *negativi*. Nel periodo ellenistico DIOFANTO aveva già avuto modo di osservare che quando si sviluppa il prodotto

---

[1] Uno sviluppo autonomo della scienza indiana viene sostenuto da B. DATTA e A. N. SINGH, in *History of Hindu Mathematics* (Parte I, Lahore 1935). Ma le affermazioni di questi autori indiani vengono confutate da S. GANDZ, in « Isis » (N. 70, vol. XXV, 2; Settembre 1936).

$(a-b)(c-d)$ si deve porre $(-b)(-d)=+bd$. BRAHMAGUPTA (n. 598) porge alcune regole pratiche per l'addizione di crediti e di debiti. Più tardi BHASKARA CARYA (n. 1114) scrive un trattato di aritmetica che contiene il calcolo delle radici; qui i numeri negativi vengono usati francamente, distinguendo il valore positivo dal valore negativo della radice quadrata e segnando, indifferentemente, in una somma, i termini negativi prima dei positivi. C'è in questo trattato una serie di esercitazioni sui numeri, che l'A. propone alla sua « bella figliuola », per consolarla — sembra — di un dispiacere amoroso; e da ciò l'opera trarrebbe il suo nome « *Lilavati* », « la Bella ». Altri interpreta questo titolo come allusione alla « bella scienza ».

Un altro trattato, *Vijganita*, porge in sostanza una teoria delle equazioni di 1° e 2° grado; quest'ultime vengono risolute regolarmente valutando gli irrazionali per approssimazione. Infine i matematici indiani procedono per lo scopo astronomico nello studio della Trigonometria, sostituendo alle corde degli archi le semicorde degli archi doppi (che sono i nostri « seni »).

11. - MATEMATICHE ARABE

L'Impero degli Arabi, venuto ad unificare il mondo orientale, si collega nelle sue origini ad un movimento religioso. Accesi dalla parola di Maometto (*Egira*, 622), gli Arabi erompono come forza travolgente dalla loro patria d'origine, invadono la Siria, l'Egitto e la Mesopotamia e poi la costa settentrionale dell'Africa, passando nella Spagna e minacciando la Francia, arrestati nella loro marcia trionfale da Carlo Martello con la battaglia di Poitiers (732). Fermatisi così nella Spagna e soprattutto nel mezzogiorno, ove rimasero fino alla presa di Granada nel 1492, gli Arabi estesero tuttavia il loro dominio sulle coste e nelle isole del Mediterraneo. Nella fede predicata da Maometto si fondono e si affratellano diverse razze, che portano all'originario nucleo guerriero i resti d'una soggiacente coltura ellenistica. Gli Arabi vennero a contatto con questa coltura per la prima

volta nella Persia, ove si rifugiarono gli eretici cristiani seguaci di Nestorio, vescovo di Costantinopoli, condannato nel 451, e più tardi — alla reggia di Cosroe — i filosofi della scuola d'Atene, chiusa da Giustiniano nel 529. Dopo le conquiste del settimo secolo, gli Abbasidi fondano Bagdad (762), che diventa centro splendido del Califfato. Quivi l'interesse degli Arabi per la cultura si esprime con una immensa raccolta di traduzioni dal greco. Vengono tradotti: gli Elementi di Euclide e la Sintassi di Tolomeo, Diofanto, Erone, Archimede, Apollonio, ecc. Nello stesso tempo s'incominciano a tradurre le opere astronomiche degli Indiani, da cui gli Arabi appresero il modo di calcolo utile per le relazioni commerciali.

Lo spirito arabo s'interessa da una parte all'astronomia, dall'altra alla meccanica e all'ottica. Per la incoronazione di Carlo Magno (800) il Califfo Harun al Raschid invia al re di Francia un orologio meccanico ad acqua. Durante il califfato del successore al Mamun, in seguito alla vittoria riportata su Bisanzio, viene imposto al vinto di consegnare un esemplare delle opere scientifiche contenute nella biblioteca, per apprestarne la traduzione. Nello stesso periodo di tempo si vedono eseguiti importanti lavori, come la misura del circolo terrestre, effettuata da Al-Khuwarizmi, secondo il metodo già usato nel 250 a. C. da Eratostene, ma con più esatto criterio della misura, che viene espressa non più in giornate di cammino, bensì in lunghezza del meridiano.

Sebbene gli Arabi si considerino soprattutto scolari dei Greci e mostrino di comprendere le esigenze estetiche e scientifiche del rigore teorico, le loro matematiche appaiono tuttavia più strettamente legate all'interesse delle applicazioni, come del resto avveniva già nella tarda età ellenistica. Per questo aspetto esse ritraggono anche qualcosa dalle matematiche indiane, a cui attinsero — come si è detto — il sistema di numerazione e di calcolo numerico, ed in parte anche lo spirito pratico che si traduce nel concetto dell'approssimazione. Il contributo più importante che gli Arabi hanno portato alle matematiche moderne è quel complesso di regole e di operazioni che costituisce l'algebra, e segna-

tamente la teoria delle equazioni di primo e secondo grado. Certo non vi è qui una scoperta loro propria, anzi soltanto un travestimento delle dottrine geometriche dei classici Greci che non pare senza precedenti nell'antichità (Diofanto); pure la nuova forma ha un'influenza essenziale sui progressi della nostra scienza.

I nomi stessi che noi adoperiamo — « algebra » e « algoritmo » — derivano da voci arabe. Il traduttore dell'Algebra di Al-Khuwarizmi ha premesso alla sua esposizione le parole: « dixit Algorithmi »; di qui il termine *Algoritmo*, che è venuto a significare per noi un qualsiasi procedimento regolare di calcolo. Inoltre il trattato del nominato matematico arabo s'intitolava *al-giabr* e *al-mukabala*, designandosi così le due operazioni fondamentali che ricorrono nell'uso delle equazioni algebriche: *al giabr*, che LUCA PACIOLO rende in latino *restauratio*, vuol dire *trasporto* d'un termine da un membro all'altro, e *al-mukabala*, in latino *oppositio*, significa riduzione dei termini simili.

Invero il trattato di AL-KHUWARIZMI, che risale alla prima metà del secolo IX dell'era volgare, tratta largamente questioni di aritmetica commerciale, e in relazione a queste, le equazioni di primo e secondo grado.

Accanto a lui ricordiamo altri nomi di matematici arabi: ABU'L WAFA della seconda metà del secolo X, che commenta Euclide e lavora particolarmente nel campo della trigonometria sferica; AL-KARKHI (o più esattamente AL-KARAGI: vissuto intorno al 1000 a Bagdad) che riprende lo studio di Diofanto e perfeziona il calcolo dei radicali. Nella stessa Bagdad, dopo la conquista dei Mongoli (1256) s'incontrerà il celebre matematico e astronomo persiano NASIR-EDDIN che fu anche fine critico della teoria delle parallele di Euclide.

Ma anche agli altri estremi del mondo arabo, dall'Egitto alla Spagna, la scienza fiorisce per opera di uomini famosi, quali sono il cosidetto GEBER astronomo di Siviglia, e l'ebreo ABRAMO SAVASORDA, che ridà ancora una trattazione delle equazioni di primo e secondo grado, mettendo in rilievo per queste ultime la possibile esistenza d'una seconda radice (non negativa), e che d'altra parte nel *Liber Embadorum* si oc-

cupa di geometria, e specialmente del calcolo delle aree, con procedimenti infinitesimali che precorrono in qualche modo gli *indivisibili* di Cavalieri; finalmente il celebre matematico, poeta e filosofo OMAR KHAYYAM, che tra l'altro s'è occupato delle equazioni di terzo grado, a cui già conducono problemi classici di Archimede e di Apollonio, insegnando a risolverle sistematicamente con l'uso delle coniche.

12. - FIBONACCI

La conoscenza delle matematiche arabe si è introdotta in Europa, anzitutto attraverso i mercanti italiani che commerciavano col Levante. Poco prima del 1200 LEONARDO DI PISA, detto il FIBONACCI (figlio di Bonaccio), ebbe a visitare l'Algeria, ove — a quanto pare — il padre esercitava una missione per conto della propria città, e quindi anche altri paesi del Levante, avendo modo così di informarsi largamente degli studi matematici. Dotato d'ingegno superiore, il giovane pisano non tardò a dominare la scienza assimilata. Nel suo *Liber Abbaci* (1202) raccoglie ed espone l'aritmetica araba, volgarizzando il sistema di numerazione basato sulla posizione delle cifre e sull'uso dello zero (« *quod arabice zephirum appellatur* »). Tratta poi delle equazioni di primo e secondo grado seguendo Al-Khuwarizmi. Ma aggiunge a ciò anche dei contributi originali, e in ispecie dispiega il suo genio in questioni di analisi diofantea risolvendo in numeri interi le equazioni di primo grado con due incognite e nel calcolo approssimato delle radici di equazioni d'ordine superiore.

Nel capitolo XIV (studiato dal Vacca), che costituisce un commento al Libro X dell'Euclide, l'Autore rivela tutta la profondità della sua scienza, discorrendo dei radicali quadratici e cubici, e dimostrando che questi ultimi non si possono ridurre alle forme classificate da Euclide.

Più tardi (1220) Leonardo ha dato nella *Practica geometriae* un'esposizione della scienza geometrica, che comincia con un richiamo delle proposizioni essenziali di Euclide e poi si volge al calcolo delle aree ed anche dei volumi aggiun-

gendo una serie di problemi determinati sulla divisione delle figure (appezzamenti di terre, ecc.). Si ammira in queste pagine il fine rigore con cui sono condotte talune dimostrazioni, e d'altra parte il senso pratico che l'Autore spiega in valutazioni approssimate, ispirandosi al modello d'Erone e riprendendo anche diverse considerazioni di Abramo Savasorda.

Altre opere minori del Fibonacci, come il *Flos* e il *Liber quadratorum*, recano pure qualcosa d'interessante: in particolare a proposito della risoluzione approssimata di equazioni proposte da Giovanni di Palermo alla corte di Federico II.

L'opera di Leonardo, per la sua stessa profondità, non potè trovare subito una comprensione adeguata. I principii ed i metodi in essa esposti saranno largamente volgarizzati in Italia soltanto due secoli e mezzo più tardi da Luca Paciolo, la cui *Summa di Aritmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, stampata a Venezia nel 1494, costituisce il comune punto di partenza dei grandi matematici innovatori del secolo seguente. Vero è che l'Abbaco di Leonardo dovette essere accolto assai presto nell'uso del commercio toscano, perchè una curiosa ordinanza del Comune fiorentino della fine del secolo XIII ne vietava l'uso nella tenuta dei libri. Ma le menti furono educate a comprendere la verità e la bellezza matematica attraverso un nuovo senso della natura che pervade l'arte del Rinascimento e si esprime nella ricerca della *divina proporzione* e nelle speculazioni filosofiche dei neo-platonici.

13. - Le matematiche nei circoli della cultura europea durante i secoli XIII-XV

Frattanto però le matematiche arabe penetravano anche i circoli ecclesiastici della cultura europea: in primo luogo attraverso Giordano Nemorario, da identificarsi forse con Giordano di Sassonia, che nel 1221 fu chiamato a succedere a San Domenico nel generalato dell'ordine. La sua *Arith-*

metica riprende Nicomaco; l'*Algorithmus demonstratus* contiene una nuova esposizione del sistema di numerazione decimale allargandosi al calcolo delle frazioni; il *De numeris datis* spiega per via di esempi la teoria delle equazioni di primo e secondo grado; il *De triangulis* costituisce un trattatello geometrico che rivela ampia conoscenza dell'Euclide. Così le fonti greche, come le fonti arabe, sono ampiamente note e utilizzate dall'Autore il quale estende il suo interesse anche ai problemi di statica scrivendo su questo argomento un notevole trattatello, il *De ponderibus*, che attinge a scritti antichi non pervenutici.

Citiamo anche GIOVANNI CAMPANO da Novara, che fu cappellano del papa Urbano IV e intorno al 1280 tradusse dall'arabo in latino gli Elementi di Euclide, aggiungendovi note critiche interessanti sulle questioni di continuità e dell'angolo di contingenza, cui dà luogo la Prop. X, 1, nonchè sugli assiomi dell'aritmetica. E poi l'inglese TOMMASO BRADWARDINO (1290-1349) che finì la sua vita arcivescovo di Canterbury, di cui sono notevoli soprattutto una *Geometria speculativa* e un trattatello *De continuo*, che inaugura le sottili disquisizioni scolastiche intorno all'infinito e alla composizione del continuo: dove si riaffacciano per la prima volta al pensiero medioevale, come motivo polemico contro l'atomismo, le difficoltà intorno agli elementi indivisibili della linea, che in Grecia erano state risolte dalla critica eleatica.

Idee più originali, che precorrono ad importanti progressi futuri, s'incontrano nella scuola di Parigi. NICOLA ORESME (nato nel 1323, morto vescovo di Lisieux nel 1382) affaccia in qualche modo la concezione delle coordinate quale comparirà più tardi in Fermat e Descartes, segnando la latitudine e la longitudine dei punti del piano a somiglianza della sfera terrestre. Lo stesso matematico introduce pure gli esponenti frazionari, che riappariranno insieme ai negativi nell'opera di N. CHUQUET (1484); e d'altra parte inizia con frutto lo studio della dinamica.

14. - Il Rinascimento

Frattanto il Rinascimento artistico col senso della proporzione e della misura contribuisce all'educazione matematica. Infatti le opere classiche dell'architettura, della pittura e della scultura sono in qualche modo una espressione parallela di quel medesimo spirito che si traduce nella contemplazione delle armonie dei numeri e delle figure geometriche. Gli artisti italiani avvertirono di buon'ora l'intimo legame dell'arte con la scienza, e l'aiuto che la tecnica scientifica poteva dare alla realizzazione dei loro disegni. Da ciò ebbero incremento gli studi dell'anatomia e della prospettiva. Questi ultimi si riattaccano all'Ottica di Alhazen, che già nel secolo XII era stata tradotta in latino. Esposizioni e sviluppi dell'argomento anche per uso delle scuole sono dati nel secolo XIII da Giovanni Peckham e da T. Bradwardino in Inghilterra; ma specialmente lo studio teorico di tali questioni viene proseguito in Polonia da Vitellione (Witelo) che ha occasione così di incontrare difficili problemi geometrici attinenti alle coniche, quali vengono suggeriti dalla lettura di Apollonio.

Non è agevole decidere fino a che punto queste dottrine di ottica e di prospettiva fossero note ai nostri artisti del Rinascimento; ma almeno alcune nozioni — per esempio quella del punto di concorso delle immagini di rette parallele — appaiono conosciute ai pittori del Trecento fino da Lorenzetti (m. nel 1348). Il sommo architetto Filippo Brunelleschi e il suo discepolo Paolo Uccello svolgono esplicitamente delle considerazioni geometriche sul problema della costruzione dell'immagine d'un corpo, che venga proiettato da un centro sopra un quadro. Più tardi le regole che essi insegnano sono in qualche modo teorizzate da Leon Battista Alberti (1404-1472) e da Piero della Francesca (1420-1492) che il Vasari dichiara il « miglior geometra che fusse nei tempi suoi »; ai quali si riattaccano poi Leonardo da Vinci e Alberto Dürer.

Una trattazione veramente matematica di questi principii

sarà data soltanto più tardi da FRANCESCO COMMANDINO (1588) e da GUIDO UBALDO DAL MONTE (1600), il quale enuncerà e dimostrerà in modo generale la regola del punto di fuga, mentre KEPLERO, nei *Paralipomena ad Vitellionem* (1609), ne trarrà il concetto dei punti all'infinito (che si trova con Poncelet a base della geometria proiettiva) in rapporto ad una veduta di continuità delle figure.

In conclusione: gl'interessi del commercio, il culto della tradizione serbato nei circoli ecclesiastici, che si volge sempre più all'ammirazione dei modelli classici, e infine le esigenze pratiche e tecniche degli artisti, concorrono a preparare un ambiente in cui la scienza matematica degli antichi poteva venire interamente compresa e ripensata con spirito nuovo. Alla fine del secolo XV i motivi del pensiero matematico si riflettono, come abbiamo accennato, nel risveglio della filosofia neo-platonica: gli occhi si riaprono sulla natura a contemplare in essa le leggi universali del numero e della misura; si annunzia così la rivoluzione scientifica che Copernico inizierà col nuovo sistema del mondo e che Keplero e Galileo realizzeranno scoprendo le prime leggi matematiche della fisica.

Capitolo III.

LE MATEMATICHE MODERNE

15. - Gli algebristi italiani del Cinquecento

Il Cinquecento italiano, saturo di coltura classica, raccoglie i frutti d'una lunga maturazione delle idee, con le scoperte dei grandi algebristi, appartenenti in massima parte alla scuola bolognese.

Per intendere alcune caratteristiche di quell'ambiente scientifico, e in particolare il geloso segreto con cui i matematici nascondevano, serbandole per sè, le loro scoperte, conviene ricordare l'uso che allora si faceva di pubbliche gare, in cui i contendenti proponevano l'uno all'altro problemi riferentisi in generale alla risoluzione di equazioni algebriche numericamente date. La vittoria o la sconfitta in simili gare poteva decidere dell'acquisto o della perdita di cattedre universitarie, per modo che ciascuno aveva il più grande interesse ad affermare e mantenere in esse la sua superiorità. Appunto in una di queste gare, nel 1535, Nicola Tartaglia da Brescia, professore a Bologna, si vide richiedere da un certo Zuannin De Tonini De Coi, bresciano, detto il Colla, la soluzione d'una serie di problemi portanti ad equazioni cubiche.

Questa circostanza parrebbe attestare soltanto che la questione di risolvere le equazioni di terzo grado era posta ai matematici dell'epoca, ed invero il tentativo di sciogliere tale problema era stato già fatto da Luca Paciolo che, non riuscendo, aveva finito per dichiararlo superiore alle possibilità della scienza contemporanea. Ma nelle gare di cui si discorre colui che proponeva una domanda era tenuto a ri-

spondervi egli stesso, in mancanza dell'avversario, sotto pena di essere svergognato come millantatore; perciò le richieste del Colla indicavano che questi dovesse in qualche modo possedere un mezzo per rispondere alle sue proprie domande. In verità pare che il Tartaglia fosse stato avvertito che il suo avversario aveva ricevuto da un matematico estinto una qualche formula di risoluzione dell'equazione cubica e, a quanto si dice, questo unico indizio sarebbe bastato a lui per ricostruire la detta formula. Il matematico che l'aveva prima scoperta era SCIPIONE DEL FERRO, che aveva insegnato a Bologna dal 1496 al 1526. Delle regole di Del Ferro era invero entrato in possesso, come narra il Bortolotti, un certo Antonio Maria Del Fiore, e se n'era valso per sfidare il Colla, che s'era rivolto al Tartaglia, assumendo egli pure l'aria di sfidatore.

In seguito, il Tartaglia si lasciò trarre a confidare la sua scoperta al medico, filosofo e matematico GEROLAMO CARDANO di Milano, con giuramento che non l'avrebbe divulgata. Come curiosità giova ricordare i versi con cui il bresciano espone la sua formula, che non è meraviglia fosse riuscita oscura al matematico milanese, obbligato perciò a richiedere spiegazioni ulteriori. Dice Tartaglia:

Quando che 'l cubo con le cose appresso,
Se agguaglia a qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.
Dopo terrai questo per consueto,
Che 'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo, delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.
. . . . . .

In questi versi s'intende spiegare la risoluzione dell'equazione cubica del tipo:

$$x^3 + ax = b, \quad (a,\ b \text{ positivi}),$$

mentre i versi successivi si riferiscono agli altri tipi di equazioni cubiche (sempre a coefficienti positivi) prive del ter-

mine quadratico. Nel linguaggio dell'epoca, l'incognita x è designata come la « cosa », x^3 come « cubo », e il termine noto b come « numero ». Tartaglia dice dunque che debbono trovarsi due numeri u e v, la cui differenza sia b:

$$u - v = b$$

e poi uguagliare il loro prodotto al cubo della terza parte del coefficiente a che figura in ax:

$$uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3;$$

si trova quindi:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}.$$

Il Cardano mantenne per alcun tempo la promessa fatta al Tartaglia sollecitando lui stesso a render pubblico il risultato raggiunto; ma più tardi si ritenne sciolto da ogni vincolo, avendo appreso da Annibale della Nave, genero di Scipione del Ferro, come questi avesse precorso il matematico bresciano. Allora egli pubblicò quanto sapeva intorno alle equazioni cubiche nel trattato *Ars Magna de rebus algebraicis* (1545), citando debitamente il Tartaglia. In questo trattato Cardano aggiunge chiarimenti e considerazioni che gli sono proprie: sulla trasformazione che fa sparire il termine di secondo grado, dando luogo alle forme ridotte di Tartaglia; e specialmente sul caso irreducibile, in cui l'equazione ammette tre radici reali, che la formula tartaleana non permette di calcolare in effetto, dovendosi operare su radicali quadratici portanti sopra un numero negativo. Infine il Cardano reca nel suo trattato anche la risoluzione delle equazioni di quarto grado conseguita dal suo allievo Ludovico Ferrari.

Lo storico che ama rendere intelligibili i progressi della scienza, è tratto ora a domandarsi per quale via la risoluzione delle equazioni cubiche può essersi presentata a Scipione del Ferro e Tartaglia. Qui soccorre una ingegnosa suggestione di Bortolotti e di Vacca, che riattaccano le origini della sco-

perta agli studi di Leonardo Pisano sulla irriducibilità degli irrazionali cubici alle forme del Libro X dell'Euclide.

Leonardo osservava che secondo Euclide la somma delle radici di un binomio e del suo *reciso* è uguale alla radice di un unico binomio:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}};$$

invece non si dà luogo ad alcuna riduzione analoga per la somma di due radicali cubici:

$$u+v=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}.$$

Ora, a chi consideri quest'espressione, può presentarsi naturale la ricerca dell'equazione a cui essa soddisfa. Ponendo $x=u+v$ ed elevando a cubo si trova:

$$x^3=3\sqrt[3]{a^2-b}\cdot x+2a;$$

e quest'equazione s'identifica con l'equazione generale del tipo:

$$x^3=px+q$$

ove si ponga:

$$a=\frac{q}{2} \qquad b=\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}$$

16. Le equazioni algebriche e gli immaginarii

La risoluzione delle equazioni cubiche segna il primo passo essenziale delle matematiche moderne al di là dei limiti della scienza greca, e dà impulso a nuovi ed importanti sviluppi. Accesi dal successo, i matematici scorgono ora nuovi oggetti e campi di studio: chè in più sensi si affacciano loro diverse possibilità di generalizzazione. Per esempio, in ordine alla teoria delle equazioni algebriche di grado n qualunque, sarà

agevole riconoscere che esse possono avere n radici e che i loro coefficienti si esprimono per mezzo di esse. Cardano era già tratto ad osservare la cosa per le equazioni cubiche, riferendosi ad esempi numerici, e più tardi VIETA, lavorando sulle equazioni fino al quinto grado con radici positive, riconosceva in generale la formazione dei coefficienti per mezzo delle radici. Frattanto però il progresso estensivo delle teorie veniva anche ad urtarsi contro paradossi e difficoltà. Già per le equazioni cubiche abbiamo accennato che Cardano metteva in luce il *caso irriducibile* ($x^3 = px + q$ per $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$) in cui le radici date dalla formula tartaleana si presentano sotto una forma priva di senso. In un simile caso la stretta logica comanderebbe di rifiutare la formula e tentare per altra via il calcolo dell'incognita che essa dovrebbe fornirci.

Così appunto doveva fare il già nominato matematico francese FRANCESCO VIETA (1540-1603) indicando la risoluzione trigonometrica dell'equazione. Ma RAFFAELE BOMBELLI, che come Tartaglia, e dopo di lui, ha appartenuto all'Università di Bologna, ha intuito che le espressioni che noi oggi diciamo immaginarie e che egli chiamava *quantità silvestri*, corrispondono ad enti possibili su cui è legittimo operare col calcolo. Già Cardano aveva osservato che secondo le regole ordinarie dell'algebra le radici immaginarie dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - 10x + 40 = 0,$$

cioè: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, soddisfano l'equazione, prendendo naturalmente:

$$\sqrt{-15}\ \sqrt{-15} = -15.$$

Bombelli nella sua « Algebra » (1572) considera in generale le quantità che oggi secondo Eulero indichiamo con $+ai$ e $-ai$ (a positivo) designandole come « *più di meno* » (abbreviato in p. d. m.) e « *meno di meno* » (m. d. m.); le combina per addizione con le quantità reali ordinarie ed insegna poi ad operare sui numeri (complessi) così ottenuti.

In verità non si può dire che Bombelli abbia giustificato l'uso degli immaginari mettendolo al riparo da ogni scrupolo logico. L'oscurità su questo soggetto permane ancora con GIRARD, che dopo avere interpretato geometricamente le soluzioni negative, considera anche le *racines enveloppées*, rappresentate mediante radici quadrate di numeri negativi, intuendo che nel campo più largo di queste si abbiano a trovare sempre n radici per l'equazione di grado n.

E rispetto a Girard non sembra realizzarsi qui un vero progresso in DESCARTES, che tratta alla stessa maniera le « *racines indicibles* » o « *imaginaires* » ed esprime parimenti la veduta che per un'equazione di grado n possano « *immaginarsi* » sempre n radici, reali o positive ovvero negative (radici false) o immaginarie.

LEIBNIZ (1646-1716) — che pure dal suo razionalismo era tratto a cercare enti di un mondo intelligibile che rispondano ai simboli del pensiero — s'indugia dubbioso ad ammirare la concezione di Bombelli: « *analysis miraculum, idealis mundi monstrum, paene inter ens et non ens amphibium* ».

Frattanto WALLIS e DE MOIVRE sviluppano più oltre il calcolo degli immaginari, riprendendo la formola di Vieta che dà il seno e il coseno degli archi multipli, e traendone la regola per l'estrazione delle radici n-esime: in tal guisa essi contribuiscono ad accrescere fiducia in quest'ordine di idee, che troverà poi la sua piena giustificazione alla fine del secolo XVIII, mercè la rappresentazione geometrica del piano complesso per opera di WESSEL, ARGAND e GAUSS. L'audace pensiero di Bombelli si realizzava così dopo due secoli di sforzi e di tentativi!

17. - SVILUPPI DELL'ALGEBRA

Dopo avere risolto le equazioni di terzo e quarto grado, era naturale che i matematici tentassero anche le equazioni di grado superiore. Gli spiriti logici e generalizzatori dei matematici francesi si volgevano di preferenza a tale campo

di studio, indagando, come già si è visto, le espressioni dei coefficienti per mezzo delle radici.

A tale proposito è interessante narrare questo fatterello. Trovandosi Enrico IV re di Francia a Fontainebleau nell'ottobre 1594, l'ambasciatore olandese ebbe a dirgli che la Francia non possedeva alcun vero matematico, poichè nessuno aveva risposto alla sfida lanciata da ADRIANO ROMANO (Adrian van Roomen) per la risoluzione dell'equazione di 45° grado:

$$45x - 3795\,x^3 + \ldots + 945\,x^{41} - 45\,x^{43} + x^{45} =$$

$$= \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}.$$

Allora, avendo il re fatto chiamare il VIETA, questi dette subito una radice e riconobbe poi che l'equazione risponde alla trisezione dell'angolo relativo al lato del pentadecagono.

Le formule di Vieta che danno i coefficienti per le radici di un'equazione saranno estese da GIRARD (1629) e poi da NEWTON, esprimendo per mezzo dei coefficienti stessi tutte le funzioni simmetriche di queste; ma quanto al calcolo delle singole radici, cioè delle incognite delle equazioni generali di grado superiore al 4°, il tentativo di esprimerle per mezzo di radicali, estendendo in tal senso i resultati di DEL FERRO, TARTAGLIA e FERRARI, doveva urtarsi in difficoltà invincibili, la cui vera natura si rivelerà, agli inizii del secolo decimonono, quando RUFFINI ed ABEL dimostreranno trattarsi d'un problema impossibile.

Frattanto i matematici si rivolgevano naturalmente alla ricerca del calcolo numerico delle dette incognite, per via di approssimazioni successive. Già Cardano vede che alle radici di un'equazione « *Per iteratas operationes semper propinquius licet accedere* ». In questa ricerca si affaccia l'idea feconda della *continuità* come criterio d'esistenza delle radici. Mentre i Greci non avevano saputo dimostrare l'esistenza di enti o soluzioni d'un problema, se non per mezzo di una costruzione, qui s'inferisce che un numero o una grandezza risol-

vente dovrà trovarsi al termine d'un processo di approssimazione spinto all'infinito. Bombelli ebbe già a ricorrere a una simile veduta per provare la risolubilità dell'equazione cubica nel caso irriducibile. Descartes giunge per questa via a intuire le note regole dei segni che permettono di decidere sul numero delle radici reali positive o negative di un'equazione di grado qualunque. Processi per la risoluzione approssimata verranno poi studiati in maniera approfondita da Newton. E giova anche dire che le considerazioni di continuità estese al campo dell'immaginario, permetteranno di stabilire con rigore il teorema che ogni equazione di grado n possiede n radici, teorema che porta il nome di D'ALEMBERT (1717-1783), ma che in realtà riceve una dimostrazione precisa soltanto da GAUSS (1799).

18. - CALCOLO NUMERICO E LOGARITMI

I progressi dell'algebra che abbiamo accennato esigevano il possesso di metodi per il calcolo numerico, che diveniva sempre più complicato e difficile in rapporto ai fini che era chiamato ad assolvere. Un grande valore pratico ha avuto perciò l'invenzione dei logaritmi.

I primi passi in questo senso sono fatti da NICOLA CHUQUET (1484) con l'introduzione degli esponenti frazionari e negativi, e da MICHELE STIEFEL, nell'*Arithmetica integra* del 1487, ove si confrontano le progressioni geometrica e aritmetica che comincino rispettivamente per 1 e 0, notando che al prodotto di due termini della prima risponde la somma dei due termini omologhi della seconda. Il belga SIMONE STEVIN (1548-1620) — il noto cultore della statica — utilizza quest'osservazione per l'uso pratico, costruendo una tabella atta ad agevolare il calcolo degli interessi composti dei capitali, ecc. Un lavoro più ampio dello stesso genere ha compiuto l'orologiaio e meccanico svizzero JOBST BÜRGIS, con le sue « *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabuln* », che tenne lungamente per sè pubblicandole soltanto nel 1620, quando era già venuta alla luce l'opera di Nepero.

Il barone scozzese GIOVANNI NEPERO (Jean Napier) merita

veramente il nome di inventore dei logaritmi per avere approfondito il problema teorico di definire la funzione logaritmica nella sua continuità, scoprendo insieme i logaritmi naturali. A queste dottrine sono dedicati i due lavori: *Canonis mirifici descriptio* (1614) e *Constructio canonis mirifici* (1619). Nepero prende le mosse da un problema meccanico: si fanno muovere sopra due rette parallele a partire da due origini O ed U, due punti: il primo (di ascissa x) percorre con moto uniforme ($x=vt$) tutta la retta, l'altro Y descrive un segmento UA, in modo che la sua velocità stia a quella di X come la distanza $y=YA$ sta a tutto il segmento UA. Prendendo questo uguale a 1 si ha:

$$-\frac{dy}{dt}=vy$$

da cui:

$$\frac{dy}{dx}=-y,$$

$$y=e^{-x}, \quad x=-\log y.$$

Le notazioni con cui abbiamo spiegato le cose, integrando una semplice equazione differenziale, sono conformi al nostro uso moderno. Nepero possiede soltanto la sostanza della cosa, dimostrando direttamente che quando x, partito da O, percorre i termini d'una progressione aritmetica, $-y$ percorre i termini d'una progressione geometrica.

Nepero ha anche calcolato espressamente il numero e che ha per logaritmo 1, cioè la base del suo sistema, dando $e=2{,}71828285$ (in luogo di $e=2{,}718281828459045....$).

19. - Notazioni

Per completare il cenno storico che precede intorno agli sviluppi dell'algebra, dobbiam dire qualcosa del progresso delle notazioni di cui i matematici facevano uso: c'è invero una lingua o, come dice Vailati, una *grammatica* dell'algebra, che si forma a poco a poco col progresso della scienza, per raggiungere il più alto grado di chiarezza e di semplicità espressiva.

Bombelli, chiamando sempre l'incognita col nome di *cosa*, la designava col simbolo 1 e indicava le sue potenze con 2 3, ecc. Adoperava poi delle lettere (*p, m...*) in luogo dei nostri segni + e —, che pure erano stati introdotti nel secolo precedente da Widmann, e che verranno ripresi da Vieta, insieme con la linea orizzontale per indicare la frazione. Ma, a prescindere da varianti poco significative, un progresso concettuale nelle notazioni si ha con Vieta, il quale per primo adopera le lettere dell'alfabeto per designare non solo le incognite, ma altresì i coefficienti (vocali per le incognite, consonanti per i coefficienti): egli intende così d'instaurare una « *logistica speciosa* » (calcolo su numeri astratti, considerati come *specie*) accanto alla « *logistica numerosa* », che è il sistema ordinario del calcolo sui numeri concreti. Tuttavia Vieta resta indietro agli algebristi italiani per quel che concerne la notazione delle potenze che è fatta in parole con linguaggio geometrico o ipergeometrico (quadratus, cubus, quadrato-quadratus, ecc.).

Notazioni più simili alle nostre usa Harriot, indicando la potenza a^3 con *aaa*, ecc.; Descartes vi sostituirà la scritta a^3, e così per tutte le potenze, salvo per il quadrato a^2, che scrive ancora sotto la forma *aa*. A Descartes si riattacca pure l'uso delle ultime lettere dell'alfabeto (x, y, z...) per indicare le incognite, riserbando le prime per i coefficienti.

Il simbolo = fu introdotto da Recorde (1510-1558) e si ritrova in Harriot.

Con ciò si comprende come la scrittura delle formule algebriche sia venuta progressivamente ad assumere la forma attuale. Tuttavia dovette passare alcun tempo prima che i matematici apprendessero a scorgerne tutto il significato in ordine all'unificazione concettuale dei problemi: riconoscendo per esempio che i tipi delle equazioni cubiche, distinti dagli algebristi del Cinquecento, si riducono ad uno solo quando si ammetta che i coefficienti possano designare indifferentemente numeri positivi o negativi. Mentre Descartes indicava ancora con le lettere soltanto i numeri positivi, Hudde in un'appendice alla Geometria analitica di questi (1658) include per la prima volta il segno + o — nella de-

signazione letterale. La maniera come scriviamo adesso l'equazione di grado n:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

implica questa riduzione e unificazione, tantochè rischia di apparire paradossale a chi non ne abbia presente lo spirito. Questa scrittura, che sembra suggerita dalle considerazioni di Harriot e di Girard, s'introduce sistematicamente dopo NEPERO, DESCARTES e HUDDE, ricorrendo prima solo in via incidentale presso Stiefel e Bürgis.

20. - GEOMETRIA ANALITICA

Lo sforzo di unificazione concettuale, che si manifesta nei progressi della lingua dell'algebra, corrisponde a una tendenza generale degli spiriti agli inizi dell'epoca moderna. Questa tendenza si rivela anche nel campo della geometria con la concezione proiettiva delle coniche in DESARGUES (1623-1662), ove coi punti all'infinito si affaccia una veduta di continuità che può riattaccarsi a Keplero.

Ma soprattutto importante e decisivo per l'indirizzo delle matematiche moderne è il concetto della *geometria qnalittca* di DESCARTES, che viene ad unificare l'algebra e la geometria, subordinando questa a quella.

L'invenzione che Descartes ha pubblicato nella sua *Géométrie* del 1637 appare anche, per quanto pare indipendentemente, nella « *Ad locos planos et solidos isagoge* » di FERMAT, che fu pubblicata più tardi, ma le cui idee erano state in parte divulgate prima in una cerchia di amici. Nell'uno e nell'altro scritto si trova il sistema delle coordinate e la rappresentazione delle linee piane mediante equazioni tra due variabili: in particolare delle coniche con equazioni di secondo grado (in Fermat anche la retta rappresentata dall'equazione di primo grado). Ma, nonostante qualche errore che vi s'incontra, la trattazione di Descartes offre un interesse filosofico superiore, come quella in cui si afferma il primato logico del numero e dell'aritmetica sulla geometria. C'è qui una rivoluzione rispetto al concetto dei Greci, che

dopo i primi conati della scuola pitagorica e la scoperta dell'irrazionale, furono indotti a ritenere gli enti e le operazioni geometriche come rappresentativi di grandezze più generali dei numeri, e perciò a tradurre sistematicamente l'aritmetica (o l'algebra) nel linguaggio della geometria. La cosiddetta « *algebra geometrica* » sviluppata nel secondo libro dell'Euclide, porge una illustrazione caratteristica di ciò che si è detto: i numeri vengono qui sostituiti da segmenti, i loro prodotti da rettangoli, e così via.

Ora il supposto geometrico dell'algebra figurava ancora implicitamente nel linguaggio di Vieta, e si ritrova sostanzialmente anche in Fermat. Ma Descartes stima che il concetto dei numeri e delle operazioni su di essi sia più semplice e perciò logicamente preceda la nozione geometrica; egli scrive a Desargues che è assai più comune intendere che cosa significhi la moltiplicazione di due numeri piuttosto che la ragion composta euclidea. Vero è che Descartes stesso, per giustificare il senso e in qualche modo l'esistenza degli irrazionali è costretto a fare appello ai rapporti delle grandezze; ma di ciò si vale soltanto nei fondamenti della sua trattazione per una definizione generale ed astratta dei numeri e delle operazioni sopra di essi. Questa considerazione preliminare non crea per lui alcun vincolo nei riguardi dell'algebra; così numeri elevati a diverse potenze possono venire legati da equazioni non omogenee: e, come Descartes riconosce, in tali casi l'unità di misura deve figurare tra i dati del problema.

L'uso del sistema delle coordinate presso Descartes e Fermat non è certo senza precedenti: lo ZEUTHEN ha riconosciuto la considerazione di qualche cosa d'equivalente presso APOLLONIO, che evidentemente ha esercitato una notevole influenza sopra Fermat e, nonostante il suo dispregio, anche su Descartes. Inoltre salta agli occhi l'analogia di tale rappresentazione dei punti del piano con quella usata dai geografi per i punti della sfera terrestre, mediante latitudine e longitudine. E come abbiamo accennato, Oresme aveva pur trasportato questo sistema di rappresentazione sopra il piano.

Non per questo si deve diminuire l'importanza dell'in-

venzione, che viene a mettere in luce tutto il valore del metodo analitico degli antichi: la risoluzione di un problema determinato (per esempio nel piano o nello spazio) dipende dalla ricerca dei punti comuni a due o tre luoghi geometrici (rispettivamente curve o superficie); ora questi luoghi, cioè le curve e le superficie, appariranno di per sè come oggetto di studio, in rapporto alle equazioni che le rappresentano. Descartes e Fermat, pur fissando l'attenzione sulle curve piane più elementari e trattando col metodo algebrico alcuni problemi particolari a cui esse danno origine, hanno dato impulso allo studio delle curve algebriche di ordine qualunque, per le quali Descartes insegna anche a risolvere algebricamente il problema delle tangenti e delle normali. Ma di ciò più avanti.

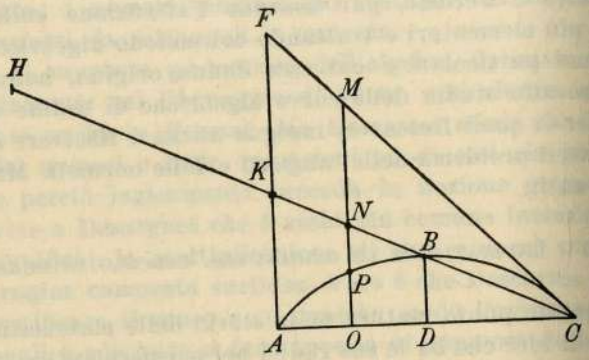
21. - La statica e le origini del calcolo integrale

A questo punto matura nella storia delle matematiche un ordine di idee che ha le sue radici nel pensiero antico, ma che riappare ora in una luce affatto nuova in relazione ai problemi della meccanica: vogliam dire l'*analisi infinitesimale*.

Abbiamo già avuto occasione di osservare che il concetto dell'infinitamente piccolo si affaccia fin dagli inizi della speculazione geometrica tostochè si afferri il carattere razionale degli enti geometrici: punto, linea e superficie. D'altra parte l'area del cerchio, e per i solidi già il volume della piramide, costituiscono dei problemi a cui si porge risposta mediante un procedimento infinito di divisione. Abbiamo pur visto che queste considerazioni sono state massimamente sviluppate da Archimede, a cui si può riattaccare dunque un primo stadio dell'analisi infinitesimale che risponde al nostro calcolo degli *integrali definiti*; in termini geometrici: determinazione di aree e volumi. Lo stesso Archimede ha collegato questi problemi con la *Statica*: momenti statici e baricentri. Nel trattatello già ricordato sul « Metodo » che è venuto in luce soltanto verso la fine del secolo scorso per opera di Heiberg, Archimede spiega ad Eratostene il procedimento di scoperta di cui egli si serviva: procedimento che consiste

essenzialmente nel considerare i solidi come somme delle loro superficie-sezione e le aree come somme di segmenti ottenuti sezionando parallelamente a una certa direzione.

Per il segmento parabolico ABC, ad esempio, tagliando con una retta PO parallela a BD, il segmento OM sta al segmento OP in ragione inversa di KN a KH (essendosi preso $HK = KC$). Si immagini allora che HC sia una leva col ful-



cro in K: il segmento OM, lasciato dov'è, equilibra il segmento OP, trasportato parallelamente a sè stesso fino ad avere il punto medio in H. Ciò vale per *tutte* le sezioni del triangolo ACF e del segmento parabolico ABC ottenute con rette perpendicolari ad AC: quindi, considerando le due aree come riempite dai segmenti, si ha che il triangolo, lasciato dov'è (o concentrato nel suo baricentro X) fa equilibrio al segmento parabolico concentrato in K. Ossia:

$$\text{area } ACF : \text{area segm. parab. } ABC = HK : KX = 3 : 1$$

Di qui, essendo ACF quadruplo del triangolo ABC, Archimede ricava che il segmento parabolico è uguale ai $\frac{4}{3}$ del triangolo ABC.

Il Rinascimento, che doveva riprendere e svolgere l'opera di Archimede, non ha conosciuto codesta operetta, ma soltanto alcune opere del geometra siracusano, che contengono dimostrazioni perfette in stile euclideo. È tanto più notevole che i geometri di quell'epoca siano riusciti a ricreare lo spirito del loro antico predecessore, che essi imitano dapprima

nelle forme del ragionamento rigoroso, apprendendo solo più tardi a cogliere in una maniera più libera ciò che costituisce l'anima della sua ricerca.

Il primo traduttore delle opere di Archimede, F. MAUROLICO di Messina (1494-1575), ricostruisce in più punti dimostrazioni non completamente sviluppate dall'autore, e d'altra parte ne estende i risultati dimostrando per esempio la posizione del baricentro del paraboloide di rotazione (limitato da un piano normale all'asse). Frattanto anche il suo contemporaneo COMMANDINO (1509-1575) divulgava questioni di Statica e di analisi infinitesimale contenute nella Collezione di Pappo.

La Statica veniva sviluppata in rapporto alle esigenze della tecnica delle costruzioni da SIMONE STEVIN (1548-1620) e da GULDINO (1577-1643). Un celebre teorema di quest'ultimo [1] insegna a trovare l'area della superficie di rotazione generata da un arco di linea piana di lunghezza l: la superficie è data dal prodotto di l per la lunghezza della linea generata dalla rotazione del suo baricentro. Questo teorema si è ritrovato, senza dimostrazione, in Pappo: così le vie degli antichi venivano ricalcate dai loro emuli moderni. Ancor meglio quest'emulazione, che porta i segni d'un prossimo decisivo progresso, si scopre in altri geometri dell'epoca. LUCA VALERIO (1552-1618), che Galileo doveva chiamare « il novello Archimede dei tempi nostri », dichiarava in forma generale il passaggio al limite che si fa implicitamente nelle dimostrazioni per assurdo secondo il metodo di esaustione, e che con linguaggio moderno si può esprimere dicendo: « *Se due variabili mantengono rapporto costante, tendendo a due limiti, anche il rapporto dei due limiti è lo stesso* ».

22. - KEPLERO

Più arditamente Keplero (1571-1630) investigava i volumi delle botti [2], trattando la matematica come ricerca induttiva, sia con l'adottare semplici ipotesi probabili (p. es. che

---

[1] *Centrobaryca*, 1635-1641.
[2] *Stereometria doliorum* (1615).

la superficie della semisfera sia media proporzionale tra quelle dei coni iscritto e circoscritto), sia con l'introdurre più feconde intuizioni infinitesimali: p. es. la considerazione del cerchio come (*veluti*) somma di infiniti triangoli, e della sfera come somma di infiniti coni di apertura infinitesima, e perciò uguale al prodotto della superficie per un terzo del raggio.

Anche nella ricerca sul moto dei pianeti che s'esprime con la sua seconda legge [1], Keplero usa genialmente intuizioni infinitesimali: il rapporto dell'area del settore a quella dell'intera ellisse viene misurato dal rapporto delle somme dei raggi vettori corrispondenti.

Questo modo disinvolto di trattare l'infinito urtava il senso tradizionale del rigore: un certo ANDERSON, scolaro di Vieta, pubblicava contro Keplero le « Vindiciae Archimedis »; e non sapeva che Archimede stesso aveva adoperato nel « Metodo » considerazioni della stessa natura! Frattanto BRIGGS prendeva le difese del criticato, confermando l'esattezza dei suoi risultati con verifiche numeriche.

23. - CAVALIERI

Intuizioni simili a quelle innanzi indicate, in una forma più precisa e sistematica, s'incontrano nell'opera di frate BONAVENTURA CAVALIERI (1598?-1647), che fu scolaro di Benedetto Castelli e di Galileo, appartenne all'ordine dei Gesuati di S. Gerolamo e successe a Cataldi nella cattedra di matematica dell'Università di Bologna nel 1629.

Per determinare, ad esempio, l'area di un'ellisse, si costruisca il cerchio tangente ad essa negli estremi dell'asse maggiore, e si osservi che questo cerchio e l'ellisse intercettano sopra la perpendicolare a tale asse segmenti che stanno tra loro in rapporto fisso, cioè nel rapporto $\frac{b}{a}$ dei due assi dell'ellisse. Immaginiamo ellisse e cerchio realizzati come superficie solide mercè una successione di bacchettine o di sottili rettangoli di carta in corrispondenza ai segmenti suddetti (perpendicolari all'asse a); allora appare chiaro che il

---

[1] Le aree descritte dai raggi vettori sono proporzionali ai tempi impiegati.

rapporto $\frac{b}{a}$ intercedente tra questi segmenti è anche il rapporto dell'area dell'ellisse all'area del cerchio, *come se* ciascuna di queste due superficie resultasse dalla somma di infiniti rettangoli d'altezza infinitesima. In conseguenza, si trova l'area dell'ellisse uguale a πab. Il semplice esempio qui addotto vale a spiegare il principio fondamentale di cui Cavalieri fa uso sistematico: se due figure piane intercettano sulle rette parallele a una direzione fissa (*regola*) segmenti che stanno tra loro in rapporto costante, questo rapporto è anche quello delle aree racchiuse dalle due figure: i segmenti anzidetti vengono considerati come elementi *indivisibili* generatori della figura. In modo simile il principio s'estende alle figure solide, che intercettano sopra un sistema di piani paralleli superficie aventi tra loro un rapporto costante: così, in particolare, appaiono senz'altro equivalenti due piramidi aventi ugual base ed altezza, e il cono e il cilindro risultano equivalenti rispettivamente alla piramide e al prisma d'ugual base e uguale altezza, ecc.

Cavalieri ha adoperato genialmente il suo principio come mezzo per risolvere problemi nuovi intorno alle aree: quei problemi che conducono per noi alla determinazione d'un integrale definito. Anzi egli ha proceduto in questo senso fino quasi ad anticipare la determinazione dell'integrale del polinomio generale d'ordine n, che dipende insomma dal calcolo di $\int_0^x x^n dx$ [1], cioè dalla determinazione del settore della parabola d'ordine n o della superficie che rimane del rettangolo circoscritto quando si tolga codesto settore. Se si cerca dapprima l'integrale $\int_0^x x\,dx$ si ha da determinare l'area d'un triangolo che varia con x restando sempre simile a sè stesso: un problema che sotto forma leggermente diversa si è presentato a Galileo nella determinazione degli spazi per-

[1] Il procedimento, abbozzato da Cavalieri, è stato completato da Torricelli.

corsi dai gravi cadenti con velocità proporzionali ai tempi. Siccome i triangoli simili sono proporzionali ai quadrati dei lati omologhi, l'area del triangolo rettangolo limitato da $y=x$ (coll'asse delle x e colla perpendicolare nell'estremo x) sarà Kx^2, e riferendosi a un caso particolare (p. es. $x=1$) si troverà $K=\frac{1}{2}$. Dopo ciò passiamo al caso dell'integrale $\int_0^x x^2 dx$; ma invece di riferirci direttamente all'area della parabola $y=x^2$, cosa estranea al pensiero di Cavalieri, che non procede ancora nell'uso della Geometria analitica, riferiamoci di nuovo al diagramma della retta $y=x$. L'operazione che dobbiamo fare consiste nel costruire per ogni ordinata il corrispondente quadrato da collocarsi in un piano perpendicolare a quello della figura e poi nel valutare il volume del solido generato da codesto quadrato variabile con x. Così siamo condotti a considerare infiniti solidi (piramidi quadrate) simili, che stanno tra loro come i cubi dei lati omologhi; perciò il volume che si ricerca, ossia l'integrale $\int_0^x x^2 dx$, verrà dato da Kx^3, e si troverà poi $K=\frac{1}{3}$.

A questo punto, un geometra moderno che abbia qualche familiarità con gli spazi a più dimensioni, non avrebbe difficoltà a concepire che il metodo precedente si estende mercè la considerazione di solidi iperspaziali simili, e conduce infine al resultato:

$$\int_0^x x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Cavalieri, pur non osando parlare di spazi a più dimensioni, e verosimilmente neppure concepirne la possibilità, è tuttavia consapevole di un'analogia in virtù della quale il metodo precedente si estende dal caso dell'esponente $n=2$ al caso di $n > 2$; procede di passo in passo a trattare i casi che si presentano per i primi valori di n.

Per ciò che si riferisce alla questione del rigore, è naturale domandarsi: che cosa sono gli indivisibili di Cavalieri,

linee o superficie generatrici di figure a più dimensioni? Sono veri infinitesimi per riguardo alla figura generata, o all'opposto si debbono prendere come rigorosamente nulli, secondo Zenone d'Elea? Tutto sembra indicare che Cavalieri fosse ben conscio che tale dilemma toglie ogni *esistenza possibile* ai suoi elementi: e perciò che questi rappresentano una comoda finzione. Comunque l'autore stesso ha tentato di giustificare i suoi principii in due modi diversi: nel primo dei quali le figure vengono considerate come *fluenti* attraverso il moto (*flussione*) dei loro indivisibili, mentre nel secondo si fa appello più direttamente alla nozione dell'infinitesimo.

L'importanza della ricerca di Cavalieri apparve all'autore stesso, che fino dal novembre 1627, quando aveva già compiuto l'opera che doveva essere stampata soltanto nel 1635, scriveva a Galileo:

« Ho perfettionato un'opera di geometria.... et è cosa nova, non solo quanto alle cose trovate, ma anco al modo di trovarle, da niuno adoperate insin'ora, ch'io mi sappi ».

S'intende che la novità della considerazione di Cavalieri è relativa, come è chiaro *a priori* per chi abbia mente alla continuità storica del pensiero: egli stesso riconosce come suo precursore Keplero, e verosimilmente deve anche qualche cosa alle suggestioni di Galileo. Invero il grande pisano, con cui Cavalieri aveva corrisposto sull'argomento fino dal 1621, era condotto in più sensi dallo studio della Dinamica a vedute infinitesimali, e in particolare ha avuto lungamente a riflettere sull'argomento degli indivisibili, sebbene una sua opera che doveva apparire su questo soggetto, non sia mai venuta alla luce.

E. Torricelli (1608-1647), che doveva estendere e proseguire le ricerche di Cavalieri (anche con la considerazione degli indivisibili curvi) così ne giudicava nelle sue *Lezioni accademiche*:

« La nuova teoria degli indivisibili va per le mani dei dotti come miracolo di scienza, e per essa ha imparato il mondo che i secoli di Archimede e di Euclide furono gli anni d'infanzia per la scienza della nostra adulta geometria ».

E B. Pascal (1623-1662), rispondendo evidentemente ai critici non soddisfatti delle giustificazioni del nostro geome-

tra, o di Roberval che ne aveva ripreso le vedute, così ne parlava nelle *Lettres de Dettonville* (1658):

« Tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'user ce langage ».

Cavalieri ha esercitato una forte influenza sui matematici che dopo di lui hanno segnato le vie del calcolo infinitesimale, e sui fondatori stessi di questo calcolo: NEWTON riprendeva da lui la nozione e il nome delle *fluenti* e delle *flussioni* (derivate), LEIBNIZ introduceva il nostro segno d'integrale, cioè lo $\int$ (deformazione d'una S, iniziale di: somma), per indicare la somma degl'indivisibili secondo Cavalieri.

24. - INTEGRAZIONI DI TORRICELLI, FERMAT e PASCAL

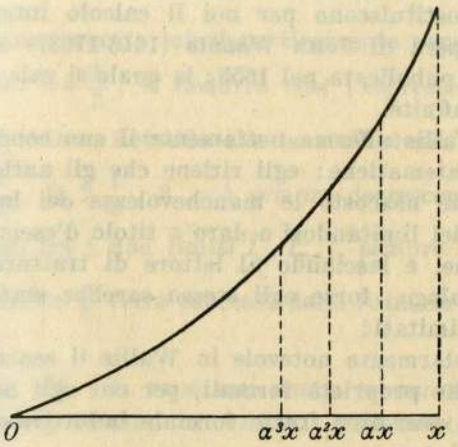
La geometria degli indivisibili ha ricevuto importanti sviluppi nella scuola stessa del Cavalieri per opera di EVANGELISTA TORRICELLI, di cui già lo Iacoli, e più largamente oggi Ettore Bortolotti, hanno messo in luce i grandi meriti matematici. In particolare il Torricelli è pervenuto ad estendere l'integrazione di x al caso di p fratto ed anche negativo.

Frattanto le idee del Cavalieri passano in Francia e si vedono fruttuosamente adoperate da P. FERMAT (1601-65) e da B. PASCAL. In particolare Fermat, che dovremo considerare tra poco tra gli iniziatori dell'analisi differenziale, s'è occupato di proposito del problema che risponde alla determinazione dell'integrale $\int_0^n x^n dx$, riuscendo a darne una geniale trattazione che, anche per n intero, appare indipendente da quella di Cavalieri e Torricelli [1].

---

[1] Un'altra trattazione sullo stesso argomento si trova in ROBERVAL, secondo concetti più vicini a quelli di Archimede. Roberval stesso ha determinato l'area della cicloide, sperimentalmente trovata da Galileo.

È interessante qui di spiegarne il concetto, come faremo riferendoci al caso semplice dell'annessa figura, ove s'è preso $n=2$.



Si divida il segmento Ox mediante i punti di ascissa αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x$ ..... che convergono ad O per $\alpha < 1$. Allora la superficie A da determinare si presenta come la somma di tanti quadrilateri (quasi rettangoli), il cui lato superiore è un tratto della nostra curva, e per α vicinissimo ad 1 questi quadrilateri possono sostituirsi con rettangoli.

Pertanto avremo:

A prossimo a:

$$x^3(1-\alpha) + \alpha^3 x^3 (1-\alpha) + \alpha^6 x^3 (1-\alpha) + \ldots\ldots,$$

cioè a:

$$\frac{x^3(1-\alpha)}{1-\alpha^3} = \frac{x^3}{1+\alpha+\alpha^2};$$

e, passando al limite per $\alpha=1$,

$$A = \frac{x^3}{3}$$

25. - Wallis

Un ulteriore importante progresso nello studio delle questioni che costituiscono per noi il calcolo integrale viene porto dall'opera di John Wallis (1616-1703): *Arithmetica infinitorum*, pubblicata nel 1655; la quale si vale soprattutto delle *serie* infinite.

Anche Wallis afferma nettamente il suo concetto induttivo delle matematiche: egli ritiene che gli antichi abbiano furbescamente nascosto le manchevolezze dei loro procedimenti euristici limitandosi a dare a titolo d'esempio qualche dimostrazione, e lasciando al lettore di trattare altri casi in modo analogo; forse egli stesso sarebbe stato più abile se li avesse imitati!

È particolarmente notevole in Wallis il senso della permanenza delle proprietà formali, per cui egli non esita ad estendere al caso di n fratto formule induttivamente conseguite per n intero.

Un esempio interessante di questo suo procedimento d'induzione si ha nel calcolo dell'area del semicerchio di raggio $\frac{1}{2}$, che lo conduce alla celebre formula

$$\frac{\pi}{8} = \int_0^1 (x - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9} \text{ ..... } (^1)$$

Wallis comincia a calcolare lo

$$I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$$

per $n = 0, 1, 2, 3....$, caso che si riconduce a calcoli prece-

---

(1) Questo sviluppo è chiarito da G. Castelnuovo, *Le origini del Calcolo infinitesimale nell'era moderna*, in pubblicazione presso l'editore Zanichelli.

denti di Cavalieri e di Fermat; si trova (per i primi valori di n intero):

$$I_n = \frac{1}{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n}{2\cdot(2n+1)} I_{n-1}.$$

Estendiamo questa relazione ricorrente ponendo, al posto di n intero, $n+\frac{1}{2}$; si dedurrà così l'espressione di $I_{n+\frac{1}{2}}$ per $\frac{\pi}{8} = I_{\frac{1}{2}}$. Ora, notando che la serie degli I_n, per $n=0$, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3..., è sempre decrescente, si troverà $\frac{\pi}{8}$ compreso fra i due limiti I_n, I_{n+1}, sempre più vicini fra loro, e al limite $\frac{\pi}{8}$ verrà espresso dalla formula sopra scritta.

26. - Il problema delle tangenti e le origini del calcolo differenziale

Mentre i problemi delle aree in connessione con la Statica (momenti e baricentri) segnano le vie del *calcolo integrale*, matura un altro ordine di idee che conduce al *calcolo differenziale*: questo movimento prende origine dai problemi delle tangenti, dei massimi e minimi e delle velocità.

Le costruzioni relative alle tangenti d'una curva s'incontrano già presso gli antichi per molti casi particolari: per esempio in Apollonio per le coniche. Ma la considerazione del diagramma di una funzione $y=f(x)$ (geometria analitica) conduce a porre sistematicamente il problema della tangente in un punto, e poi delle tangenti parallele a una certa direzione, ecc. La tangente nel punto x si presenta come limite della congiungente col punto vicino $x+h$ e quindi ha come *coefficiente angolare* (tangente trigonometrica dell'angolo formato con l'asse delle x) il

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = y',$$

ciò che noi chiamiamo la *derivata* della funzione f nel punto x.

Questo concetto si presenta sostanzialmente fino dai primi studi sulle tangenti di FERMAT (1637-38), solo che in luogo di considerare il coefficiente angolare suddetto, questi porta la sua attenzione sulla *sottotangente*, che è $\frac{y}{y'}$. L'applicazione più importante che Fermat reca del nuovo concetto è la regola per la determinazione dei massimi e minimi che porta:

$$y' = 0.$$

A rigore Fermat, anzichè parlare di limite, indica di porre $h=0$ nell'espressione del rapporto incrementale

$$f(x+h) - f(x),$$

intendendo che la divisione per h sia effettivamente eseguita prima di questa posizione, come in realtà può farsi nei casi più semplici da lui considerati.

In tal guisa dal punto di vista geometrico Fermat ha riconosciuto come condizione di massimo o minimo l'esistenza d'una tangente parallela all'asse delle x; e del resto egli non ha mancato di avvertire il caso d'eccezione del flesso.

27. - LA DERIVATA COME VELOCITÀ

Negli stessi anni sopra indicati viene pubblicata la più profonda trattazione matematica della Dinamica di GALILEO, cioè i *Discorsi e dimostrazioni matematiche sopra due scienze nove*, dove l'autore, indipendentemente dai fondatori della geometria analitica, fa uso di diagrammi per rappresentare il moto: si può dire che il tempo figura come ascissa e la velocità come ordinata.

Nello studio del moto, la velocità si presenta come derivata dello spazio rispetto al tempo: invero Galileo, riprendendo e approfondendo il pensiero di Giovanni Benedetti, ha riconosciuto la forza come causa di variazione della velocità per gradi insensibili, cosicchè per un piccolo tratto ogni moto può ritenersi uniforme, prendendo come valore

approssimato della sua velocità il rapporto dello spazio percorso al tempuscolo impiegato a descriverlo.

È ovvio che da queste considerazioni deve scaturire un raffronto tra il problema della tangente e quello della velocità. Questo raffronto è almeno implicito nella posizione di Galileo, se pure sia stato apertamente dichiarato dai suoi continuatori TORRICELLI e ROBERVAL, di cui non ci fermiamo ad esaminare le ragioni di priorità. Diremo soltanto che considerando la rappresentazione parametrica d'una curva descritta da un punto mobile nel tempo:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

essi rilevano esplicitamente che la tangente alla curva si trova come diagonale del parallelogrammo delle velocità secondo i due assi, ciò che per noi si traduce più precisamente nella formula:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Non c'indugeremo a rilevare i diversi contributi portati a quest'ordine di idee dai precedenti ricercatori, e poi da DESCARTES e dal suo discepolo HUDDE (risoluzione algebrica dei problemi delle tangenti per le curve algebriche, massimi e minimi delle medesime, ecc.), ma vogliamo riconoscere nell'opera di Galileo il germe di una più importante scoperta, che verrà a collegare il calcolo differenziale al calcolo integrale.

28. - INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE COME OPERAZIONI INVERSE L'UNA DALL'ALTRA

Per determinare gli spazi percorsi nel moto uniformemente accelerato (caduta dei gravi), GALILEO, come già s'è accennato, costruisce il diagramma della velocità funzione del tempo, avendo assunto v proporzionale a t, cioè, come noi scriviamo:

$$v = gt.$$

Egli trova allora [1] che gli spazi sono rappresentati dalle aree dei triangoli formati dalla retta $v = gt$ con l'asse delle t e con la perpendicolare a questo nel punto t, e quindi, secondo la nostra scrittura:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

Se ora rappresentiamo la dipendenza dello spazio dal tempo nel nostro moto con la curva

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

la relazione di questa curva alla retta

$$v = gt$$

consiste nel fatto che:

1°) le ordinate della curva degli spazi sono proporzionali alle aree racchiuse dalla linea delle velocità;

2°) e per contro le ordinate dei punti di questa seconda linea sono i coefficienti angolari delle tangenti dell'altra curva.

Questo duplice legame riesce per noi chiaro e semplice, e pertanto siamo indotti a scorgere in esso il germe d'una scoperta d'ordine generale, cioè che mettendo a raffronto due diagrammi rappresentativi d'un moto qualsiasi, nell'uno dei quali siano rappresentati gli spazi, nell'altro le velocità come funzioni dei tempi, sempre accadrà che le ordinate dei punti della prima curva rispondano alle aree contenute dalla seconda (insieme con l'asse delle t e con la perpendicolare ad essa nell'estremo), mentre le ordinate dei punti

---

[1] Ciò risulta implicito dal ragionamento che Galileo impiega per stabilire il suo teorema: « *Il tempo nel quale con moto uniformemente accelerato, a partire dalla quiete, viene percorso da un mobile un certo spazio, è uguale al tempo nel quale lo stesso spazio verrebbe percorso dallo stesso mobile con moto uniforme di velocità uguale alla metà di quella massima del moto uniformemente accelerato* ». Ivi Galileo inferisce l'uguaglianza degli spazi percorsi dall'uguaglianza delle aree comprese tra il diagramma della velocità e l'asse delle ascisse.

della seconda risponderanno ai coefficienti angolari delle tangenti alla prima.

Tuttavia rimane dubbio ed oscuro fino a che punto l'intuizione sopraindicata si trovi presente nello spirito di Galileo, e si affaccia il problema storico di riconoscere in quali modi e momenti si chiarisca alla mente dei suoi successori. Qui il primo nome che deve essere ricordato è quello di Torricelli, il quale, ha riconosciuto il fatto da noi espresso dicendo che *l'integrale è l'inverso della derivata,* per le curve di una particolare famiglia, che sono le parabole generalizzate d'Apollonio. E convien dire che le considerazioni da lui fatte hanno in realtà un valore assolutamente generale e sembrano essere state presenti alla mente di Isacco Barrow, il maestro di Newton. Barrow enuncia il detto teorema fondamentale d'inversione, più precisamente riferendosi ancora alla sottotangente $\frac{y}{y'}$, anzichè alla derivata y.

29. - Leibniz e Newton

A questo punto, che cosa manca per costruire il *calcolo infinitesimale*?

Occorre anzitutto identificare più precisamente la velocità (derivata dello spazio) con l'elemento che determina la posizione della tangente alla curva rappresentativa degli spazi

$$s = s(t),$$

e così sostituire alla sottotangente il coefficiente angolare $[v = s'(t)]$. In tal guisa si palesa nella maniera più semplice il rapporto della derivazione e dell'integrazione come operazioni inverse l'una dell'altra.

Ma, in secondo luogo, conviene acquistare consapevolezza di ciò: che la derivazione si lascia eseguire mediante regole fisse, conducendo in generale a semplificare le funzioni date (almeno quelle di cui occorre più frequente l'uso nell'analisi); cosicchè la ricerca di un integrale o dell'area relativa a una curva $y = f(x)$ (integrale indefinito) a meno d'una costante additiva arbitraria, si potrà opportunamente ricon-

durre a quella della funzione primitiva, che ha per derivata la funzione integranda $f(x)$.

Questi compiti sono stati assolti da GOFFREDO GUGLIELMO LEIBNIZ specialmente nello scritto « *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus*, quae nec fracta nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », del 1684 (1) e da ISACCO NEWTON, i cui « *Principia philosophiae naturalis* » sono apparsi al pubblico nel 1687 (2); i quali, presentando in una forma nuova e più completa l'ordine dei concetti di cui qui si discorre, vengono considerati come fondatori del moderno calcolo infinitesimale.

Leibniz ha fissato soprattutto in maniera sistematica le regole della derivazione (derivate del prodotto, del quoziente, della funzione di funzione e della funzione inversa, nonchè derivate delle funzioni più semplici), usando di un simbolismo espressivo che è stato adottato dopo di lui dai matematici del continente e ha finito poi con l'imporsi anche in Inghilterra, dove si è serbata per circa un secolo la tradizione del linguaggio newtoniano. La derivazione della funzione $y=f(x)$ viene considerata da lui come quoziente di due « *differentiae* » o (come si è detto in seguito secondo Giov. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali

$$\frac{dy}{dx},$$

cioè dell'incremento infinitesimo della funzione a quello della variabile indipendente: se questi infinitesimi vadano intesi soltanto in senso *potenziale*, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come *infinitesimi attuali*, non appare chiaramente nell'opera di Leibniz (3). Sembra

---

(1) *Acta eruditorum*, Lipsia, 1684: cfr. la traduzione italiana di E. CARRUCCIO, in « Periodico di Matematiche ».

(2) Cfr. I. NEWTON, *Principi di filosofia naturale e teoria della gravitazione*, con note critiche di F. ENRIQUES e U. FORTI. Bologna, 1924.

(3) Passaggi suscettibili di interpretazioni contradditorie vengono citati nel saggio storico di G. VIVANTI, *Il concetto di infintesimo*..... Mantova, 1894.

che egli comprendesse che l'infinitesimo potenziale è sufficiente alla costruzione del calcolo, ma d'altra parte ragioni metafisiche portavano nella sua mente l'infinito e l'infinitesimo attuale: « Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu' elle l'affecte partout pour mieux marquer la perfection de son Créateur » (1).

Newton svolge le sue considerazioni col linguaggio della geometria e della dinamica: ciò che noi chiamiamo la derivata della funzione $f(x)$ è per lui la flussione, cioè la velocità con cui varia questa funzione (fluente). In uno *Scolio* al capitolo su « Il moto dei corpi » (2) Newton illustra la differenza fra il proprio metodo e quello degli indivisibili:

« .... Si sarebbero ottenute dimostrazioni più corte di quelle da me date, facendo uso del metodo degli indivisibili. Ma poichè l'ipotesi degli indivisibili è molto discutibile, e perciò il metodo che ne deriva è poco geomètrico, mi è parso preferibile dedurre le mie dimostrazioni col metodo delle prime ed ultime ragioni.... E quando, in seguito, considererò delle quantità come composte di particelle determinate — così se prenderò per rette delle piccole porzioni di curva — non intenderò che tali quantità siano indivisibili.... [perchè] la natura non conosce limiti...., ma bensì delle quantità divisibili evanescenti: e per somme e rapporti non intenderò somme e rapporti determinati, ma limiti di somme e rapporti ». Più chiaramente nel seguito (3): « Si potrà ancora obiettare che se è dato l'ultimo rapporto di due quantità evanescenti, saranno anche date le ultime grandezze di tali quantità; cosicchè ogni quantità risulterebbe composta di Indivisibili, al contrario di ciò che Euclide ha dimostrato circa gli incommensurabili nel X degli *Elementi*. Ma questa obiezione si basa su di una falsa ipotesi: le ultime ragioni che hanno tra di loro le quantità evanescenti non sono le ragioni delle ultime quantità o di certe quantità determi-

(1) *Lettre à Foucher*, in « Op. phil. ». Edit. Gerhardt, I, 416.
(2) Trad. italiana pag. 96, *op. cit.*
(3) Pag. 98, *op. cit.*

nate e indivisibili, ma i limiti a cui si avvicinano le ragioni delle quantità indefinitamente decrescenti, limiti da cui le ultime ragioni possono differire meno di qualsiasi differenza assegnata, che non possono mai sorpassare e che non possono attingere prima che le quantità siano indefinitamente diminuite ».

Come si vede, Newton pone a fondamento della sua trattazione quel concetto di *limite*, che già era stato introdotto da P. MENGOLI (1625-1686) e da J. GREGORY (1638-1675), e che in un'epoca critica successiva sarà suscettibile di conferire ai principii dell'analisi infinitesimale un carattere affatto rigoroso. Ma di ciò più avanti.

30. - I DUE INDIRIZZI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

Le ricerche di Leibniz e di Newton, sono esse indipendenti? Benchè il lavoro di Newton sia stato pubblicato tre anni più tardi, si sa che l'autore aveva approfondito le questioni infinitesimali in uno studio del 1670-71: *Methodus fluxionum et serierum infinitarum,* che fu pubblicato soltanto dopo la sua morte nel 1736, ma di cui le idee principali furono di buon'ora conosciute nel circolo degli amici. Di qui il sospetto che queste idee abbiano influito su Leibniz e quindi la polemica per la priorità dell'invenzione del calcolo infinitesimale, che si accese tra i due grandi e i loro discepoli, soffiandovi dentro le passioni nazionalistiche. Non ha per noi importanza rievocare i pettegolezzi che hanno invelenito la discussione: anche le menti più eccelse non sono esenti da qualche debolezza!

Del resto, la polemica ha perduto gran parte delle sue ragioni per lo storico che tenga davanti agli occhi la lunga evoluzione delle idee, che nei lavori di Leibniz e di Newton trovano in qualche modo l'espressione definitiva. Si può ammettere tutt'al più che Leibniz, avendo avuto qualche sentore delle ricerche di Newton, sia stato indotto da ciò ad approfondire e svolgere le idee di quei predecessori su cui il fisico inglese ha costruito il suo stesso edifizio. E se anche in altri scritti successivi il filosofo tedesco abbia peccato,

tentando ingiustamente di appropriarsi cose del suo rivale, conviene riconoscere che la maniera di svolgere ed esprimere i principii del calcolo, nel lavoro sopra citato del 1684, reca ad ogni modo l'impronta della sua originalità.

Appunto le differenze tra Leibniz e Newton spiegano la diversa influenza che i due pensatori hanno esercitato sullo sviluppo della scienza. Leibniz tende sistematicamente alla generalità, e perciò il suo concetto della funzione come *expression de calcul* formata coi simboli operatori dell'analisi, è il precedente storico della *funzione di variabile reale* definita secondo Dirichlet (corrispondenza arbitraria per cui a ogni x entro un dato intervallo corrisponde un y). Newton — mente inglese, portata alla considerazione del particolare concreto — lavora di solito sopra esempi tratti dal campo algebrico, considerando così la funzione implicita $y(x)$, definita da un'equazione algebrica $f(x,y)=0$; ma proprio questi esempi portano a questioni che esorbitano dalla generalità leibniziana: tali la derivata di una funzione implicita e poi la rappresentazione d'una funzione mediante serie di potenze, che fu data nella scuola newtoniana da Taylor (1685-1731) e Mac-Laurin (1698-1746); più tardi l'analisi delle singolarità delle curve algebriche.

31. - Equazioni differenziali

Lo sviluppo del calcolo infinitesimale conduce alla posizione di problemi affatto nuovi, che esorbitano dal quadro delle matematiche antiche ed anche dai confini dell'algebra: si tratta delle *equazioni differenziali*, che hanno per oggetto, non più di determinare i valori di grandezze o di numeri incogniti, ma la *forma di funzioni* (curve, superficie, ecc.) soddisfacenti a certe condizioni. Il nuovo ordine di idee si affaccia dapprima in alcuni casi particolari suggeriti dallo studio del moto. I precedenti storici sono: anzitutto la determinazione della spirale di Archimede nell'antichità, e poi la ricerca del portoghese Pedro Nunes (Nonius, 1492- 1577), l'autore del *nonio*, dove si tratta della curva che taglia i meridiani della superficie terrestre sotto un angolo costante

(curva importante per la navigazione, che Snellio chiamerà *lossodroma*), infine anche il problema che abbiam visto condurre NEPERO (1614) all'invenzione dei logaritmi.

Problemi simili, ed anche più elevati, si presentano nella scuola di GALILEO; ma soltanto nella scuola di DESCARTES si affacciano sotto l'aspetto geometrico come *problemi inversi delle tangenti*. A prescindere dalla ricerca di una curva che deve trasformare per rifrazione un fascio di raggi luminosi in un altro fascio, Descartes stesso, rispondendo a una questione sollevata da DE BEAUME, insegna a determinare le curve, per cui il rapporto dell'ordinata alla sottotangente è proporzionale alla differenza tra ascissa e ordinata; che in termini nostri vuol dire integrare l'equazione differenziale del prim'ordine:

$$\frac{dy}{dx} = k(x - y).$$

(L'A. sostanzialmente risolve quest'equazione riducendola a una quadratura, mediante una sostituzione di variabili).

Lo schema generale dei problemi portanti ad equazioni differenziali del prim'ordine si lascia esprimere sotto forma geometrica come segue: ad ogni punto del piano viene associata una direzione, secondo cui esso deve muoversi: si domanda di determinare le traiettorie del punto mobile, cioè le curve che hanno in ciascun punto come tangente la direzione associata. Il problema si può anche presentare in relazione al *moto stazionario* d'un liquido: supposto che ogni gocciolina d'un fluido si muova secondo una direzione che dipenda soltanto dalla posizione di essa e non vari col tempo, determinare le traiettorie delle dette goccioline.

Comunque ci si riferisca alla prima o alla seconda formulazione, appare chiaro che il problema conduce non già ad una curva determinata, bensì ad un fascio di *curve* o *funzioni integrali*, contenenti una costante arbitraria (scelta arbitraria del punto di partenza della curva richiesta). L'*esistenza* delle curve integrali (che esigerà una particolare analisi quando si tratti di precisarne le condizioni analitiche) si riconosce come intuitiva: poichè a partire da un punto P

si otterrà una poligonale vicina alla curva integrale, ove si faccia descrivere al punto una serie di piccoli tratti successivi, ciascuno secondo la direzione associata all'estremo iniziale.

32. - Equazioni e sistemi d'equazioni differenziali d'ordine superiore

Le equazioni del prim'ordine innanzi considerate non sono che un caso particolare delle *equazioni differenziali di ordine qualsiasi,* nelle quali si tratta in generale di risalire da un'equazione

$$f(x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

ad una funzione $y(x)$ o ad una relazione integrale

$$F(x, y) = 0;$$

e l'integrale viene qui a dipendere da n costanti arbitrarie. È importante rilevare che lo studio della Dinamica conduce immediatamente ad equazioni del second'ordine, sicchè appunto da un'equazione di questo tipo dipende il problema del moto parabolico d'un grave lanciato con una qualsiasi velocità iniziale, che si trova risoluto da Galileo nel suo ultimo scritto fondamentale del 1638.

Con la costruzione della dinamica di Newton (teoria della gravitazione universale) si presentano non solo le equazioni differenziali del second'ordine, ma anche *sistemi* di equazioni siffatte, cosicchè per quest'aspetto si deve riconoscere a Newton il possesso dei concetti più generali che stanno a base della teoria delle equazioni differenziali. I metodi di trattazione di questa — i diversi espedienti che consentono di ridurre alcune classi di equazioni notevoli alle quadrature, i procedimenti mercè cui si può in ogni modo calcolarne le soluzioni in via approssimata, ecc. — sono frutto del lavoro dei matematici che hanno continuato l'opera del creatore della dinamica, e in particolare di quelli che durante il secolo XVIII hanno approfondito le questioni della meccanica

celeste (CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULERO, LAGRANGE e LAPLACE). D'altra parte i problemi sopra indicati ricevono una estensione con lo studio delle equazioni a derivate parziali, che hanno per oggetto le condizioni differenziali tra funzioni di più variabili indipendenti. E questo studio ha ricevuto il più grande impulso dalla Fisica matematica: sia dal tentativo di spiegare i fenomeni fisici mediante un soggiacente meccanismo (democritico-cartesiano o newtoniano), sia dalla costruzione più generale di teorie, in cui i fenomeni vengono chiariti da analogie meccaniche (per esempio la propagazione del calore confrontata alla diffusione d'un fluido, ovvero la distribuzione dell'elettricità alla superficie d'un conduttore, ecc.).

33. - CRITICA DEI PRINCIPII DEL CALCOLO

Il calcolo leibniziano ha trovato subito continuatori, che ne hanno sviluppato ed esteso le dottrine, durante il secolo XVIII: dal marchese DE L'HÔPITAL a GIACOMO e GIOVANNI BERNOULLI, a LEONARDO EULERO, a LAGRANGE, ecc. Frattanto però, dopo un secolo di applicazioni feconde, i principi di esso sollevavano ancora dubbi ed incertezze; anzi la questione critica dei concetti dell'analisi infinitesimale sembrava diventare più acuta. JEAN D'ALEMBERT, nell'articolo *Differentiel* della Grande enciclopedia francese, scriveva che l'infinito è soltanto un modo di parlare, e che infine il calcolo opera soltanto su quantità finite. Ma egli stesso ne riconosceva la manchevolezza dei principii, quando ad un giovane studioso dell'analisi infinitesimale che gli esprimeva i suoi dubbi rispondeva con la frase famosa: « Allez de l'avant: la foi vous viendra ».

L'Accademia di Berlino, presieduta da LAGRANGE, aprì nel 1784 un concorso sul concetto dell'infinito matematico, domandando « una teoria chiara e precisa di ciò che si chiama infinito in matematica », e in particolare di chiarire « come possano dedursi tanti teoremi veri da una supposizione contraddittoria ». Il premio fu conferito a SIMONE L'HUILIER, la cui *esposizione elementare* ha veduto la luce a Tubinga nel

1795, e sembrò allora formarsi un ambiente di reazione contro il metodo leibniziano del calcolo, col ritorno ai più laboriosi procedimenti degli antichi. Da ciò appunto LAZZARO CARNOT fu condotto a riabilitare e giustificare i nuovi metodi nelle sue « Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal » (1797).

Questo celebre studio critico chiarisce sostanzialmente le ragioni di successo e il significato del Calcolo, ma una risposta definitiva ai dubbi critici è venuta soltanto da L. A. CAUCHY, nella sua *Analyse Algébrique* del 1821, dove l'infinitesimo è trattato sistematicamente come una quantità variabile che tende al limite zero. In connessione con l'impulso critico dato da CAUCHY, da ABEL, BOLZANO, ecc., molti matematici successivamente hanno spinto avanti la critica dei fondamenti dell'analisi, riuscendo ad una sistemazione rigorosa di tutte le sue deduzioni: citiamo: K. WEIERSTRASS, B. RIEMANN, G. CANTOR, HEINE, R. DEDEKIND, CH. MÉRAY, G. DARBOUX, C. JORDAN e in Italia U. DINI, C. ARZELÀ, G. PEANO, a cui fa seguito una brillante scuola di analisti contemporanei.

In particolare, svolgendo l'esatta dimostrazione di esistenza degli integrali delle equazioni differenziali (CAUCHY) e delle equazioni a derivate parziali (S. KOWALEWSKY) si sono assegnate (in modo sempre più largo) le condizioni precise sotto le quali l'equazione proposta ammette come integrale una funzione continua e derivabile.

Capitolo IV.

LETTERATURA MATEMATICA

A complemento della storia delle dottrine, compendiosamente esposta nei capitoli precedenti, daremo una bibliografia, ordinata in guisa da mettere in luce lo sviluppo della scienza fino ai nostri giorni. Nel libro terzo avremo luogo di riprendere e chiarire i progressi delle idee in rapporto ad alcuni problemi fondamentali, e quindi di completare anche le indicazioni che qui trovano posto, colla citazione di opere più speciali.

34. - Le storie

Citiamo anzitutto le *storie generali* della matematica, le quali potranno servire sia come orientamento, sia come fonte di notizie su determinati periodi.

Cominciamo con alcune storie concepite or è più d'un secolo, le quali interessano oggi più che altro per le svariate notizie che in esse si trovano, ed anche come espressione dello spirito della cultura scientifica, in tempi meno vicini a noi:

J. F. Montucla, *Histoire des mathématiques dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours, etc.* Parigi, 1789-1802.

A. G. Kästner, *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts.* Gottinga, 1796-1800.

C. Bossut, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques.* Parigi, 1802.

G. Libri, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie (depuis la Renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle).* Parigi, 1838-41.

Tra le opere più recenti:

M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Lipsia, 1880-1908: ultime edizioni del 1907 per il I vol., del 1914 per il II, del 1901 per il III, del 1908 per il IV.

È il più vasto trattato che sia stato scritto sulla storia delle matematiche. Il quarto ed ultimo volume (1759-1799) è uscito solo nel 1908 col concorso di vari collaboratori.

Si tratta di un'opera analitica, ricca di citazioni e di notizie, che non è ancora sostituita nella letteratura contemporanea. Su alcune questioni particolari, tuttavia, occorre tener conto di correzioni apportate più tardi, specialmente dall'ENESTRÖM nella sua *Bibliotheca mathematica*. Ed anche conviene fare qualche riserva sui giudizi personali che il CANTOR non manca di esprimere, e di motivare lungamente, intorno alle questioni più controverse e difficili.

G. LORIA, *Storia delle Matematiche*. Torino, 1929-33 (tre volumi), compendio da cui si ritraggono le principali notizie sui contributi portati dai più eminenti matematici al progresso delle teorie.

S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik*. Lipsia, 1908-1911.

Il I volume va dall'antichità a Cartesio; il II, da Cartesio alla fine del secolo XVIII, appartiene a H. WIELEITNER, che ha proseguito l'opera interrotta dalla morte del GÜNTHER.

Storie limitate a particolari periodi.

Per le matematiche preelleniche è fondamentale:

O. NEUGEBAUER, *Vorgriechische Mathematik* (primo volume delle *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*). Berlino, 1934.

Allo studio delle matematiche greche son dedicate le opere seguenti:

C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides - Ein historischer Versuch*. Lipsia, 1870.

G. J. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublino, 1889.

P. TANNERY, *La géométrie grecque: comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*.

(I Parte di una progettata *Histoire générale de la géometrie élémentaire*). Parigi, 1887.

Attraverso le storie citate, con accurata indagine filologica delle fonti, si è riusciti a ricostruire nelle sue grandi linee lo sviluppo della geometria greca, che conduce agli *Elementi* di EUCLIDE.

G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. II ed. Milano 1914, raccoglie, completandole in una più vasta esposizione analitica, le ricerche dei predecessori.

T. HEATH, *A history of Greek Mathematics*. Oxford, 1921,

è la più completa storia analitica delle matematiche greche, con accurata critica letteraria.

H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Kopenhagen, 1896. (Traduzione tedesca dell'edizione danese del 1893, traduzione francese del 1902),

opera geniale, che in forma rapida e con vedute scientifiche originali, reca la più chiara esposizione dello sviluppo dei concetti della geometria greca.

Cfr. anche l'articolo:

H. G. ZEUTHEN, *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter*, in *Die Kultur der Gegenwart*. Berlino-Lipsia, 1912.

J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik*. III edizione. Berlino e Lipsia, 1930-33.

E per i rapporti con le vedute più alte delle matematiche moderne:

Questioni riguardanti le matematiche elementari, raccolte e coordinate da F. ENRIQUES. III edizione. Bologna, 1924-27.

L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI, *Enciclopedia delle matematiche elementari*. Milano, 1930-36.

Per i legami delle matematiche con la *storia generale della scienza*:

F. ENRIQUES e G. DE SANTILLANA, *Storia del pensiero scientifico*. Vol. I: *L'Antichità*. Bologna, 1932.

F. ENRIQUES e G. DE SANTILLANA, *Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni*. Bologna, 1937.

Per lo stato delle conoscenze matematiche nell'*Impero Romano* e nel *Medio Evo*:

M. CANTOR, *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst*. Lipsia, 1875.

G. FRIEDLEIN, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis zum 13. Jahrhundert*. Erlangen, 1869.

S. GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts in dem deutschen Mittelalter bis zum Jahre* 1525. Berlino, 1887.

H. SUTER, *Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters*. Zurigo, 1887.

Lo sviluppo delle matematiche a partire dal Rinascimento costituisce l'oggetto fondamentale delle storie generali delle matematiche che abbiamo innanzi citato. Storie speciali su questo periodo costruttivo sono:

H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im* XVI *und* XVII *Jahrhundert*. Lipsia, 1903,

opera bellissima, con indirizzo concettuale elevato, che offre una ricostruzione originale dello sviluppo delle teorie, specialmente per il calcolo infinitesimale.

E. Bortolotti, *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII*. Bologna, 1928,

lavoro fondamentale che ricostruisce, con più ampie e precise notizie, l'opera degli algebristi italiani del Cinquecento.

G. Castelnuovo, *Le origini dell'analisi infinitesimale nell'era moderna*. Bologna (in corso di pubblicazione).

P. Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra - Storia critica di nuôve disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita*. Parma, 1797-99.

Per gli *sviluppi più recenti delle matematiche*:

L. Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*. Lipsia, 1878,

reca un'esposizione della dottrina delle equazioni algebriche, confrontando i diversi sviluppi che ha avuto nella storia e fornendo ampie notizie bibliografiche.

F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlino, 1926-27,

opera interessante e suggestiva, anche per le vedute che l'Autore esprime intorno alle connessioni delle idee ed ai rapporti delle persone.

35. - Riviste storiche e guide

Accanto alle storie propriamente dette, occorre ricordare quegli studi storici più frammentari, relativi ad argomenti particolari, che son costituiti dagli articoli delle riviste. Sono strumenti ausiliari preziosi, e vanno in ogni caso consultati prima di compiere qualsiasi ricerca particolare.

Citiamo le seguenti *riviste*:

Historisch-literarische Abteilung della *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, iniziata da M. Cantor nel 1859 (assumendo il titolo suddetto solo nel 1877). I lavori di maggior mole vennero più tardi ospitati in una pubblicazione ausiliaria, intitolata: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*.

Sia nella *Abteilung*, sia nelle *Abhandlungen*, si trovano lavori di importanza fondamentale, da cui chi si accinge allo studio di determinate questioni non può assolutamente prescindere.

Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche fondato dal Boncompagni (venti volumi, 1868-87); per l'illuminata munificenza del dotto principe Baldassarre Boncompagni, tenne alto il

nome dell'Italia nel campo della storia della matematica, in un'epoca in cui questi studi erano misconosciuti e trascurati.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, pubblicato per cura di G. LORIA a datare dal 1898.

Bibliotheca mathematica di G. ENESTRÖM, dal 1887.

Inoltre:

J. C. POGGENDORFF, *Biographisch literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften* (Lipsia 1863, 1898, 1904, 1926).

Recentemente si sono iniziate le importanti pubblicazioni:

Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik (O. NEUGEBAUER, J. STENKEL, O. TOEPLITZ). Berlino, 1930 e segg.

Abteilung A: *Fonti*; Abteilung B: *Studi*.

Scripta mathematica edito da J. GINSBURG. (New-York dal 1932).

Riviste più generali di storia della scienza sono:

Isis, edito da G. SARTON (Bruges, dal 1913).

Osiris, idem dal 1936.

Archeion (già *Archivio di Storia della Scienza*), edito da A. MIELI (dal 1919; Roma-Parigi).

Infine si trovano articoli di storia delle matematiche anche in talune riviste di carattere più generale, come:

Scientia (Bologna, dal 1907).

Periodico di matematiche. Serie IV, direttore F. ENRIQUES (Bologna, dal 1921).

Disgraziatamente mancano a tutt'oggi, per molte riviste, indici complessivi per argomenti, che permettano di trovare con comodità gli articoli riguardanti un particolare studio. Tuttavia c'è un elenco annuale delle pubblicazioni storiche (libri e articoli di riviste, con brevi recensioni) nella sezione *Geschichte* dello: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (1868 e segg., Berlino-Lipsia) e (dal 1931 in poi) del: *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* (Berlino).

Guide per lo studio della storia delle matematiche sono:

G. LORIA, *Guida allo studio della storia delle matematiche*. Milano, 1916.

G. SARTON, *The Study of the History of Mathematics*. Cambridge, Mass., 1936.

Più vasto compito d'orientamento nella letteratura matematica ha

F. MÜLLER, *Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften*. Lipsia, 1909 (Abhandlungen zur Gesch. d. Math. Wiss., XXVII, Heft).

36. - Opere di classici: antichità

Lo studio delle storie ci spiega l'opera matematica secondo la veduta dello storico, ma non dispensa dall'acquistarne una conoscenza personale, quale si ottiene risalendo ai lavori originali. Questi recano qualcosa che invano si cercherebbe nelle esposizioni dei trattati: degli elementi suggestivi anche per il matematico che vuol comprendere e ricostruire la genesi del pensiero dei matematici che l'han preceduto e trarne aiuto alle proprie ricerche.

Le opere originali dei più importanti autori si trovano generalmente raccolte in particolari edizioni con note, raffronti, ecc. Vi sono anche delle raccolte aventi scopo divulgativo, le quali offrono traduzioni in lingue moderne; così gli: *Otswalds Klassiker der exakten Wissenschaften* (Lipsia, dal 1889 in poi) forniscono in lingua tedesca (testo o traduzione) brevi opere scientifiche dei principali autori, con sobrie note di commento. Nel 1932 la raccolta aveva sorpassato il 230° volumetto.

Un'altra raccolta, di traduzioni (italiane) di testi, assai più modesta come numero di volumi, ma dove attraverso le note si mira a definire la posizione storica dell'opera, è quella: *Per la storia e la filosofia delle matematiche*, edita da F. Enriques (Bologna, edit. Zanichelli): ne citeremo i volumi a mano a mano che se ne presenterà l'occasione.

Qui ci limitiamo a fornire indicazioni sulle opere dei più grandi matematici e sui principali studi che ad essi si riferiscono, scegliendo opportunamente, con criterio di sobrietà e di economia.

Euclide.

L'edizione critica di tutte le opere di Euclide a noi giunte è:

Euclidis opera omnia, editi da J. L. Heiberg e H. Menge. Lipsia, 1883-99.

Testo greco e traduzione latina. Sono anche riportati gli scolii ed il commento di Anarizio.

Cfr.:

J. L. Heiberg, *Literargeschichtliche Studien über Euklid*. Lipsia, 1882.

Il commento di Proclo al primo libro degli *Elementi*:

G. Friedlein, *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, Lipsia, 1873,

reca le più importanti notizie sulla formazione della geometria greca.

Tra le edizioni più recenti degli *Elementi*, con commento:

M. SIMON, *Euklid und die sechs planimetrischen Bücher*, mit Benutzung der Textangabe von Heiberg. Lipsia, 1901 (Abhandlungen zur Geschichte der Math. Wiss., XI Heft).

T. HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements*. Cambridge, 1908 e segg.,

traduzione inglese con accurate disquisizioni filologiche ed interessanti commenti.

F. ENRIQUES, *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, editi col concorso di diversi collaboratori. Bologna, 1925-36, 4 voll.,

traduzione italiana con note storico-critiche.

In questi libri di SIMON, di HEATH, di ENRIQUES si trovano anche riferimenti bibliografici sulle più antiche traduzioni (ad es.: CAMPANO, ZAMBERTI, TARTAGLIA, PELETIER, COMMANDINO, CLAVIO, CATALDI, BORELLI, ecc.) e sulla letteratura euclidea.

Per quanto riguarda le opere minori:

M. CHASLES, *Les trois livres des porismes d'Euclide rétablis pour la première fois*. Parigi, 1860,

tentativo di ricostruzione interessante, se pure controverso.

R. C. ARCHIBALD, *Euclid's book on Division of Figures*. Cambridge, 1915,

traduzione inglese e parziale ricostruzione.

Archimede.

Edizione critica:

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, edite da J. L. HEIBERG (testo greco e traduzione latina). I ediz. Lipsia, 1880-81 e II ediz. Lipsia, 1910-15.

Tra le traduzioni in lingue moderne:

The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters, by T. L. HEATH. Cambridge, 1897 (traduzione tedesca di F. KLIEM. Berlino, 1914).

di comoda lettura, non solo per l'uso della lingua inglese e delle notazioni moderne, ma anche per le spiegazioni riguardanti la terminologia archimedea. Nell'edizione inglese del 1897 manca ancora il trattatello sul *Metodo*, che, pubblicato a parte come supplemento da HEATH nel 1912, si trova nella citata edizione tedesca.

Les Oeuvres complètes d'Archimède, traduites du grec en français, avec une introduction et des notes, par P. VER EECKE. Parigi-Bruxelles, 1921.

A questo libro rimandiamo per la bibliografia sulle più antiche

traduzioni delle opere di ARCHIMEDE (COMMANDINO, ecc.) e sulla letteratura archimedea.

E. RUFINI, *Il « Metodo » di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, Roma, 1926, presso Zanichelli, Bologna.

Apollonio.

Edizione critica:

Apollonii Pergaei quae greca extant cum commentariis antiquis, edito da J. L. HEIBERG. Lipsia, 1891-93,
testo greco e traduzione latina.

Tra le traduzioni in lingue moderne:

Apollonius of Perga. Treatise on conic sections, edited in modern notation, with introductions including an essay on the earlier history of the subject, by T. L. HEATH. Cambridge, 1896.

Les Coniques d'Apollonius de Perge, trad. francese e note di P. VER EECKE. Bruges, 1924,
con ricca letteratura su APOLLONIO.

Die Kegelschnitte des Apollonios, trad. tedesca di A. CZWALINA. Monaco-Berlino, 1926.

Sulle dottrine d'Apollonio è fondamentale l'opera:

H. G. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, ediz. tedesca. Kopenhagen, 1886,
ricostruzione ardita e geniale della teoria delle coniche, nel quadro generale della geometria greca.

Diofanto.

Edizione critica:

Diophanti Alexandrini Opera omnia cum Graecis commentariis, edite da P. TANNERY. Lipsia, 1893-95.

Traduzioni in lingue moderne:

Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek Algebra, by T. HEATH, II ediz. Cambridge, 1910,
traduzione inglese dell'*Aritmetica* e del libro sui numeri poligonali, con ampi commenti e studii.

Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones. Oeuvres traduites par la première fois du grec en français avec une introduction et des notes, par P. VER EECKE. Bruges, 1926.

Cfr. anche:

P. TANNERY, *Études sur Diophante. La perte de sept livres de Diophante, etc.* (Mémoires scientifiques de P. Tannery, t. II).

Pappo,

raccoglitore ed espositore degli sviluppi matematici degli ultimi secoli dell'età ellenistica.

Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt, edite da F. HULTSCH. Berlino, 1876.

P. VER EECKE, *Pappus d'Alexandrie*. La Collection Mathématique. Parigi-Bruges, 1933.

Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, testo e note a cura di A. ROME. Roma, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1931.

Abbiamo inoltre opere e frammenti di molti autori greci, tra cui:

Ippocrate di Chio. Lipsia, 1907, edit. F. RUDIO.

Autolico da Pitane. Lipsia, 1886, edit. F. HULTSCH.

Teodosio da Tripoli. Gottinga, 1927, edit. HEIBERG; Bruges, 1927, edit. P. VER EECKE.

Claudio Tolomeo. Lipsia, 1898-1907, edit. HEIBERG.

Erone di Alessandria. Lipsia, 1899-1914 edit. W. SCHMIDT ed altri.

Menelao. Lipsia, 1902, edit. A. A. BJÖRNBO.

Nicomaco. Lipsia, 1886, edit. HOCHE.

Giamblico. Lipsia, 1891, edit. FESTA.

37. - CLASSICI DEL MEDIOEVO

Per le matematiche del Medioevo indichiamo:

I testi di BOEZIO. Lipsia, 1867, edit. G. FRIEDLEIN.

GERBERTO, *Opera mathematica*. Berlino, 1899, edit. BUBNOW.

V. inoltre:

H. WEISSENBORN, *Gerbert, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters*. Berlino, 1888.

SAVASORDA, *Liber Embadorum*. Berlino, 1913, edit. GUTTMANN; Barcellona, 1931, editori GUTTMANN e VALLICROSA.

Cfr.:

M. CURTZE, Der Liber Embadorum des Abraham bar Chija Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli, in: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, XII Heft, 1902.

Per i matematici arabi esistono parziali traduzioni in lingue moderne; per esempio di: AL KARKI, OMAR KHAYYAM, AL KHUVARIZMI, NASIR EDDIN.

Per una più ampia notizia bibliografica vedi G. LORIA, *Storia* cit.

Leonardo Pisano.

Scritti di LEONARDO PISANO, matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da B. BONCOMPAGNI; vol. I: *Liber Abbaci*. Roma, 1857; vol. II: *Practica geometriae* e opuscoli. Roma, 1862.

B. BONCOMPAGNI, *Studi su Leonardo Pisano*, in « Bullettino », Roma, 1852, 1854.

Citiamo poi in forma abbreviata le opere di:

GIORDANO NEMORARIO, cfr. M. CURTZE, 1887 e 1891.

G. PEURBACH. Norimberga, 1541.

REGIOMONTANO. Venezia, 1533, cfr. M. CURTZE, 1902; S. MAGRINI, 1916.

N. ORESME. Padova, 1482, Cfr. M. CURTZE, 1868.

N. CHUQUET, *Triparty*, mnscr. Bibl. naz. di Parigi Fond. Franç. n. 1346, pubblicato in Bollettino di Boncompagni da A. MARRE, 1880-81.

LUCA PACIOLO. Venezia, 1494, 1509, 1525; cfr. B. BONCOMPAGNI, 1857, A. AGOSTINI, 1924.

38. - CLASSICI DEI SECOLI XVI E XVII

G. CARDANO, *Opera omnia*. 10 voll. Lugdunium. Lione, 1663.

R. BOMBELLI, *Algebra*. Libri I-III. Bologna, 1579. — Libri IV-V, a cura di ETTORE BORTOLOTTI. Bologna, 1929.

B. CAVALIERI, *Directorium generale uranometricum*. Bologna, 1632.

Geometria indivisibilibus continuorum. Bologna, 1635.

Exercitationes geometricae. Bologna, 1647.

E. TORRICELLI, *Opere*, per cura di G. LORIA e G. VASSURA. 3 voll. Faenza, 1919.

Cfr. E. BORTOLOTTI, *I progressi del metodo infinitesimale nell'Opera geometrica di Evangelista Torricelli*, « Per. di Mat. », 1928.

P. FERMAT, *Oeuvres*, per cura di P. TANNERY, C. HENRY e M. C. DE WAARD. 5 voll. Paris, Gauthier-Villars, 1891-1922.

R. DESCARTES, *Oeuvres*. 12 voll. per cura di C. ADAM e P. TANNERY. Parigi, Cerf, 1897-1913.

J. WALLIS, *Opera Mathematica*. 3 voll. Oxonia (Oxford), 1695-99.

I. BARROW, *Lectiones opticae et geometricae*. Londra, 1674.

I. NEWTON, *Opera omnia*, a cura di S. HORSLEY. 5 voll. Londra, 1779-1785.

Principii di filosofia naturale, per cura di F. ENRIQUES e U. FORTI. Roma, 1925.

G. G. LEIBNIZ, *Mathematische Schriften*, ed. C. I. GERHARDT. 7 voll. Berlino, 1849; Halle, 1863.

L. COUTURAT, *Opuscles et fragments inédits de Leibniz*. Parigi, 1903.

Cfr. i testi di Newton e Leibniz in G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*. (In corso di pubblicazione. Bologna, Zanichelli).

Per i classici posteriori vedansi le bibliografie dei diversi §§ del Libro terzo.

39. - TRATTATI D'ALGEBRA

J. WALLIS, *De Algebra Tractatus historicus et practicus*. I ediz. inglese, 1685; ediz. latina con nuove appendici: Oxford, 1693,

porge un'interessante esposizione delle dottrine secondo l'ordine storico, e perciò si può considerare in certo senso come il primo vero trattato della materia.

L. EULERO, *Vollständige Einleitung zur Algebra*. Pietroburgo, 1770. (Trad. fr. con addizioni di Lagrange, 1794).

G. L. LAGRANGE, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. III ed. Parigi, 1826.

A. CAUCHY, *Analyse algébrique*. Parigi, 1821.

In questi trattati l'algebra viene concepita soprattutto come introduzione all'analisi infinitesimale. Ma nello svolgimento della teoria delle equazioni algebriche si può riconoscere un campo di studio proprio, che si estende in più sensi col progresso delle ricerche. Anzitutto lo studio delle *formazioni razionali*, quale appare già nella teoria dell'eliminazione:

E. BÉZOUT, *Théorie générale des équations algébriques*. Parigi, 1779.

quindi nei *determinanti* (LEIBNIZ, CRAMER, JACOBI, BRIOSCHI) e nella dottrina generale degli *invarianti* e *covarianti*:

G. SALMON, *Lessons introductory to the modern higher Algebra* Dublino, 1859.

P. GORDAN, *Vorlesungen über Invariantentheorie*. Lipsia, 1887.

W. S. BURNSIDE e A. W. PANTON, *The Theory of equations*. IV ediz. Dublino-Londra, 1899-1901.

J. H. GRACE e A. YOUNG, *The Algebra of Invariants*. Cambridge, 1902.

Cfr. il *Bericht* di F. MEYER (Math. Vereinigung I, 1892).

In secondo luogo l'Algebra si svolge con la classificazione delle irrazionalità, legandosi da un lato alla teoria delle *sostituzioni* (GALOIS) e dall'altro alla teoria dei *corpi numerici*. I più vasti trattati sono:

C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Parigi, 1870.

J. A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*. Parigi, 1885.

H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*. Braunschweig, 1895-96.
E. NETTO, *Vorlesungen über Algebra*. Lipsia, 1896-1900.
R. FRICKE, *Lehrbuch der Algebra*. Braunschweig, 1924, 26, 28.

Per le teorie di GALOIS (di cui avremo occasione di discorrere nel terzo libro) vedi, oltre ai precedenti:

W. BURNSIDE, *Theory of Groups of finite Order*. Cambridge, 1897. II ediz. 1911.
G. A. MILLER, H. F. BLICHFELDT, L. E. DICKSON, *Theory and Applications of finite Groups*. New York, 1916,
trattato che va molto avanti nell'esame delle questioni speciali.

Inoltre:

O. PERRON, *Algebra*. Berlino, 1932-33,

e l'esposizione didattica di:

L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. Pisa, 1899.

In relazione all'indirizzo aritmetico cfr:

E. BOREL e J. DRACH, *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure (d'après les conférences de* J. TANNERY). Parigi, 1895).
E. STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper*, neu herausgegeben und mit einem Anhang « Abriss der Galois'schen Theorie » versehen, von R. BAER und H. HASSE. Berlino, 1930,
ripubblicazione di una memoria precedente del 1910.
G. SCORZA, *Corpi numerici e Algebre*. Messina, 1921.
B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*. Berlino, 1930-31.

Nei corsi istituzionali delle nostre università l'Algebra è divenuta sempre più una introduzione al calcolo. Gli sviluppi propriamente algebrici non vanno, in ogni caso, oltre la teoria dell'eliminazione e la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado. Basterà ricordare i trattati di: G. NOVI (1863), A. CAPELLI, E. CESARO, che ha uno speciale carattere aritmetico (trad. ted. 1904), G. RICCI, M. CIPOLLA, S. PINCHERLE, F. SÉVERI, B. LEVI.

40. - TRATTATI DI GEOMETRIA ANALITICA

R. DESCARTES, *La Géométrie*. Leida, 1637.
I. NEWTON, *Geometria analytica sive specimina artis analyticae*. Redazione postuma di HORSLEY. Londra, 1779.
I. NEWTON, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, appendice alla *Optics*. Londra, 1704.

G. MAC LAURIN, *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis*. Londra, 1720.

J. P. DE GUA, *Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le sécours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*. Parigi, 1740.

G. CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. Ginevra, 1750.

ANONIMO FRANCESE, *Traité des Courbes Algébriques*, 1756. Attribuito da Chasles a DIONIS DU SÉJOUR et GOUDIN.

J. PLÜCKER, *System der analytischen Geometrie*. Berlino, 1835.

J. PLÜCKER, *Theorie der algebraischen Kurven*. Bonn, 1839.

BRIOT et BOUQUET, *Leçons de Géométrie analytique*. Parigi, 1865.

O. HESSE, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene*. Lipsia, 1873.

A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, bearbeitet von J. LINDEMANN. Lipsia, 1875-76, trad. francese di A. BENOIST. Parigi, 1876 e segg.

Prendendo le mosse dalle questioni elementari (coniche) si estende alla teoria superiore delle curve, costituendo un trattato d'insieme sulla geometria algebrica, che è stato sostituito soltanto dalle opere più recenti della scuola italiana (cfr. la bibliografia del Libro terzo, § 24).

G. SALMON, *A treatise on the higher plane curves*. Dublino, 1852; traduzione tedesca ampliata da S. FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 1882; traduzione francese di CHEMIN, *Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*). II ediz. Parigi, 1903.

Comprende la più vasta introduzione alle teorie moderne della geometria differenziale e della geometria algebrica.

I corsi istituzionali nelle Università italiane si limitano in genere all'uso delle coordinate ed alla teoria delle linee e superficie del second'ordine. Dopo il 1890, secondo il programma di L. CREMONA, l'insegnamento della geometria analitica è stato fuso con quello della geometria proiettiva nell'Università di Roma, e quest'ordinamento ha finito per estendersi a tutte le altre Università. Il primo trattato che realizza la fusione:

G. CASTELNUOVO, *Lezioni di geometria analitica*. Roma, 1903,

offre uno svolgimento semplice e chiaro dei concetti e delle dottrine, e nelle esercitazioni porge le più ricche notizie su risultati complementari.

Altri trattati di geometria analitica sotto vari aspetti pregevoli sono dovuti a:

E. D'OVIDIO (1885), L. BIANCHI (corso di lezioni pubblicato soltanto nel 1915), G. SCORZA, G. FANO e A. TERRACINI, A. COMESSATTI, O. CHISINI, ecc.

41. - Trattati di calcolo infinitesimale

Dopo i lavori fondamentali di Newton e di Leibniz si hanno diverse esposizioni, sia nella scuola inglese (Taylor, 1715; Stirling, 1730, Mac Laurin, 1742), sia sul Continente (G. Bernoulli, 1691-92; de L'Hospital, 1696). In ispecie gli sviluppi formali contenuti in queste ultime precorrono a:

L. Eulero, *Introductio ad analysim infinitorum*. 1748.

L. Eulero, *Institutiones calculi differentialis*. Pietroburgo, 1755.

L. Eulero, *Institutionis calculi integralis*. Pietroburgo, 1770,

opere che, a parte il rigore, costituiscono i primi trattati completi, traverso a cui si afferma il predominio delle notazioni leibniziane.

Seguono:

G. L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*. Parigi, 1797,

tentativo di costruire il calcolo a partire dalla definizione di funzione come serie di potenze.

G. L. Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions*. Parigi, 1806.

S. F. Lacroix, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Parigi, 1810-14-19,

trattato che ebbe ai suoi tempi la più vasta diffusione.

A. L. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'Ecole royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Parigi, 1823.

A. L. Cauchy, *Leçons sur le calcul différentiel*. Parigi, 1829. (Nuova edizione della I parte del *Résumé*).

A. L. Cauchy, *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*. Parigi, 1826.

Cfr.:

Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral redigées d'après les méthodes et les ouvrages publiées ou inédites de A. L. Cauchy par M. Moigno.

Sebbene l'esigenza del rigore affermata da Cauchy non venga osservata in tutta la sua pienezza, appaiono ancora bellissimi e conservano un alto valore educativo i trattati posteriori di:

C. H. Sturm, *Cours d'analyse*. Parigi, I ediz. 1857, II ediz. 1880,

assai diffuso per oltre un ventennio.

J. Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Parigi, 1864-70.

J. A. Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*. Parigi, 1868: traduzione tedesca di A. Harnack, con successive rielaborazioni.

I. TODHUNTER, *A treatise on the differential calculus, and the elements of the integral calculus*. Cambridge, Macmillan, 1852; traduzione italiana con aggiunte di G. BATTAGLINI. Napoli, Pellerano, 1874, 2 voll. in 8°.

J. BOUSSINESQ, *Cours d'analyse infinitésimale*. Parigi, 1887-90, notevole specialmente per le applicazioni alla fisica matematica.

In Germania ha avuto pure larga diffusione:

L. KIEPERT, *Grundriss der Differential und Integralrechnung*, rielaborazione dei *Leitfaden* di M. STEGEMANN del 1862, XII ediz. Hannover, 1912.

L'ultima fase dello sviluppo dei trattati è dominata dai progressi formali (JACOBI, ecc.) e dalla definizione puramente aritmetica dell'integrale secondo CAUCHY e RIEMANN, in connessione col concetto più generale della funzione e con la teoria degli insiemi (K. WEIERSTRASS, P. DU BOIS REYMOND, L. DIRICHLET, G. CANTOR, U. DINI, ecc.). L'insegnamento di WEIERSTRASS, nel giro ristretto dei suoi discepoli, ha penetrato lentamente più larghe cerchie di studiosi. Frattando la critica moderna maturava nei seguenti trattati:

U. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*. Pisa, 1878 (trad. tedesca. Lipsia, 1892).

U. DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale* (ed. litografata, 1878). Pisa, 1907-15, che offrono la prima sistemazione critica rigorosa dei teoremi del Calcolo.

A. GENOCCHI, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, pubblicato con aggiunte da G. PEANO. Torino, 1884.

G. PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale*. Torino, 1893, che si riattaccano anche alla tradizione dell'insegnamento di CAUCHY a Torino.

C. JORDAN, *Cours d'analyse de l'école polytechnique*. Parigi, I ediz. 1882-87, III ediz. 1909-13.

L'opera si estende alle dottrine superiori dell'Analisi, e porta a risultati critici positivi di grande importanza, come la condizione di rettificabilità delle curve, ecc.

J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Parigi, 1886.

O. STOLZ, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*. Lipsia, 1893.

DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitesimale*, I ed. 1903, II ed. 1925, Lovanio.

C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Lipsia e Berlino, I ediz. 1917, II ediz. 1927, sistemazione della teoria sulla base degli assiomi della teoria degli insiemi.

Citiamo ancora:

E. CESARO, *Elementi di calcolo infinitesimale*. Napoli, 1897 (II ediz. 1905 e trad. tedesca).

C. ARZELÀ, *Lezioni di calcolo infinitesimale*. Firenze, 1901, che riprende, secondo un punto di vista critico, l'ordine storico, premettendo il calcolo integrale al differenziale.

E. W. HOBSON, *The theory of Functions of a real variable and the theory of Fourier's Series*. I ediz. Cambridge, 1907; II ediz. Cambridge, 1921.

42. - TRATTATI DI ANALISI

A complemento di questa letteratura citiamo alcune opere, che si estendono ai più larghi campi dell'Analisi moderna.

I trattati più generali, di uso comune, sono:

E. PICARD, *Traité d'Analyse mathématique*, III ediz., 2 voll. Parigi, 1917-18.

J. HADAMARD, *Cours d'Analyse* professé à l'Ecole Polytechnique, 2 voll. Parigi, 1927-30.

RIEMANN'S *Vorlesungen, Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik*, a cura di H. WEBER. V. ediz. Braunschweig, 1910-12.

FRANK e v. MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, I ed. 3ª 1935, II 1927. Braunschweig.

R. COURANT e D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*. Berlino. Springer, I, 1931; II, 1937.

Per la teoria delle funzioni analitiche citeremo:

L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. Pisa, Spoerri, 1925 (1 vol.); Bologna, Zanichelli (2 voll.).

L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2 voll. Lipsia, Berlino, Teubner, 1921-27.

W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 3 voll. Lipsia-Berlino, 1923-32.

E. BOREL, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*, 1 vol. Parigi, Gauthier-Villars, 1917.

R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*, 1 vol. Berlino, Springer, 1936.

I volumi della *Collezione Borel* e i trattati più speciali sulle funzioni ellittiche, abeliane, automorfe, ecc., verranno citati nelle bibliografie dei varii §§ del Libro terzo.

Libro Secondo

LE MATEMATICHE NELLA CULTURA

Capitolo I.

LE MATEMATICHE NEL QUADRO GENERALE DELLE SCIENZE

1. - Meccanicismo

Secondo l'ideale degli antichi Pitagorici, le matematiche dovevano dar ragione delle differenze qualitative dei fenomeni, riducendole a differenze quantitative, e ciò mediante la rappresentazione dei corpi materiali come « numeri » o gruppi di unità (monadi). Attraverso la critica del concetto della materia, che si è svolta poi da Parmenide d'Elea a Democrito d'Abdera, l'ideale pitagorico si ritrova trasformato come programma d'una *spiegazione cinetica* del mondo: la materia è composta di atomi privi di qualità, estesi ed impenetrabili, che si muovono nel vuoto, e dai loro moti e dai reciproci urti nascono le apparenze fenomeniche. Dice Democrito: « Apparenza (νόμῳ) il colore, apparenza il dolce, apparenza l'amaro; in realtà, soltanto gli atomi e il vuoto » [1].

Dal concetto democriteo della spiegazione meccanica dell'Universo deriva il programma della scienza moderna, che si esprime col *meccanicismo*; e da questo traggono anzitutto il loro significato le matematiche come organo della scienza fisica.

Le idee di Democrito, che appaiono già nel Medioevo attraverso i riferimenti d'Aristotele e la non del tutto interrotta tradizione epicurea, si diffondono e si affermano come dominanti nei circoli scientifici agl'inizi del secolo XVII,

---

[1] In Diels, « Vorsokratiker », frammento 125.

con DANIELE SENNERT, SEBASTIANO BASSO, GALILEO GALILEI, PIETRO GASSENDI, RENATO DESCARTES, ecc.

Dice Galileo nel *Saggiatore* (1623): « Ben sento tirarmi dalla necessità, subito che concepisco una materia o sostanza corporea, a concepire insieme ch'ella in relazione ad altra è grande o piccola, ch'ella è in questo o quel luogo, in questo o quel tempo, ch'ella si muove o sta ferma, ch'ella tocca o non tocca un altro corpo, ch'ella è una, poche o molte, nè per veruna immaginazione posso separarla da queste condizioni; ma ch'ella debba esser bianca o rossa, amara o dolce, sonora o muta, di grato o d'ingrato odore, non sento farmi forza alla mente di doverla apprendere da cotali condizioni necessariamente accompagnata; anzi se i sensi non ci fussero scorta, forse il discorso o l'immaginazione per sè stessa non vi arriverebbero già mai. Per lo che vò io pensando che questi sapori, odori, colori, ecc., per la parte del soggetto nel quale ci par che riseggano, non sieno altro che puri nomi, ma tengano la lor residenza nel corpo sensitivo... ». E più avanti: « Ma che nei corpi esterni, per eccitare in noi i sapori, gli odori e i suoni, si richiegga altro che grandezze, figure, moltitudini e movimenti tardi o veloci, io non lo credo ».

In maniera più sistematica Cartesio espone il programma della spiegazione meccanica dell'Universo, determinando rigidamente le nozioni primitive a cui deve ridursi ogni conoscenza fisica, col fare appello soltanto alle proprietà d'estensione e d'impenetrabilità della materia figurata (*legami* di tipo geometrico) e al movimento: « Non alia principia in Physica quam in Geometria, vel in Mathesi abstracta, a me adamitti, nec optari, quia sic omnia naturae phaenomena explicantur et certe de iis demonstrationes dari possunt » [1].

Su questo fondamento Cartesio ha tentato la costruzione di una Dinamica universale, in cui le forze (che rifiuta di accogliere come « qualità occulte ») verrebbero spiegate mediante vortici, azioni centrifughe, urti, ecc. Ma sebbene quest'ordine di idee sia stato ripreso in vari tentativi da un matematico superiore come CH. HUYGENS (ricordiamo per

---

[1] *Principia philosophiae*, « Oeuvres », VIII, 78.

esempio il celebre tentativo di spiegare la gravità come effetto di masse rotanti attorno alla Terra), il sistema stesso ha dovuto cedere di fronte a un disegno meno ambizioso, venendo ad un compromesso nella costruzione effettiva della Dinamica.

Già nei circoli cartesiani l'idea di riuscire ad una descrizione effettiva del meccanismo del mondo appariva come un miraggio impossibile. Dice B. PASCAL: « Il faut dire en gros cela se fait par figure et mouvements, car cela est vrai; mais dire quels et composer la machine, cela est ridicule... ».

Effettivamente NEWTON, riprendendo e proseguendo le idee di Galileo, non ha esitato a costruire la Dinamica in base all'assunto delle forze a distanza, postulate come dati sperimentali, senza pretendere di assegnarne la causa. Così, accanto al meccanismo cartesiano che nella sua idea ispiratrice meglio risponde alle esigenze visive del geometra, sorge il meccanismo newtoniano, frutto di una concessione e di un compromesso con le ragioni positive del conoscere [1].

2. - SPIEGAZIONE MECCANICA DEI FENOMENI FISICI

Il successo della teoria newtoniana, che riesce a rappresentare meravigliosamente i moti dei corpi celesti (e poi a rendere ragione della loro forma, ecc.), suscitava il disegno concreto di spiegare meccanicamente i diversi ordini di fenomeni fisici, indagando ciò che Pascal aveva stimato ridicolo di domandare: la composizione della macchina del mondo. Col rinunziare alle troppo rigide esigenze del meccanismo cartesiano, e quindi col ricorrere secondo l'opportunità alle forze centrali, o al postulato di eteri, fluidi e masse nascoste dietro la realtà fenomenica, la richiesta si presentava ai fisici matematici, successori di Newton, come programma di una ricerca effettivamente possibile.

Già NEWTON stesso, che aveva dichiarato non essere riu-

---

[1] Per la storia della controversia del cartesianismo col newtonianismo, cfr. T. MOUY, *Le développement de la Physique Cartésienne*, Parigi, 1934.

scito a dedurre le cause della gravitazione e non voleva fare ipotesi — poichè « le ipotesi fisiche o metafisiche *pro nihilo sunt habendae*, non avendo luogo nella filosofia sperimentale » —, aveva pure introdotto l'ipotesi dell'*emissione* di particelle luminose per basarvi la sua ottica (1704); ch'egli costruiva di fronte all'ottica dell'*ondulazione* (ipotesi della propagazione d'un moto ondoso in un etere elastico) sviluppata da HUYGENS (1678). Com'è noto quest'ultima doveva trionfare più tardi della teoria rivale negli sviluppi di FRESNEL (1821).

D. BERNOULLI (1738) costruisce la prima *teoria cinetica dei gas*, dove le proprietà del gas (pressione; temperatura) vengono figurate da un modello democritico-cartesiano in relazione ad un sistema di particelle liberamente mobili ed urtantisi fra loro, che coi loro urti premono sulle pareti; e in tal guisa riesce a dar ragione delle leggi di Boyle.

R. BOSCOVICH (1763) disegna, secondo le idee newtoniane, il primo schema di rappresentazione della materia in vista di spiegare la *capillarità*, e questa teoria verrà spinta avanti da LAPLACE e da POISSON.

Frattanto la dinamica newtoniana si fortificava colle più precise verifiche nel campo dell'astronomia, e riceveva un complemento nella trattazione dell'equilibrio e del moto dei sistemi vincolati (principio dei lavori virtuali e principio di D'ALEMBERT), che appare compiuta e ordinata nel modo più perfetto con la *Meccanica analitica* di LAGRANGE (1787). Qui i due concetti fondamentali che figurano nel meccanismo cartesiano e newtoniano — legami e forze — sono simultaneamente introdotti senza chiedere una riduzione necessaria dell'uno all'altro. E così viene offerta l'occasione di allargare il senso della spiegazione meccanica come accade nella *Teoria dell'elasticità* di G. GREEN in confronto a quella edificata sull'ipotesi delle forze centrali esercitantisi tra punti fissi, che è stata sviluppata da NAVIER e da POISSON: qui il punto di vista della Meccanica analitica viene contrapposto a quello (strettamente newtoniano) della *meccanica fisica*, supponendo forze interne qualsiansi il cui lavoro sia proporzionale alla deformazione di volume. Ed il resultato rende

conto assai meglio della varietà delle esperienze, conducendo a trovare 21 anzichè 15 coefficienti d'elasticità, che per i *solidi isotropi* danno *due* coefficienti distinti invece d'*uno solo*.

3. - Positivismo

Nello sviluppo della Fisica teoretica l'idea ispiratrice del meccanicismo viene a contrasto coll'esigenza positiva di riattaccarsi immediatamente alla realtà dei fenomeni; quindi diverse vedute si alternano e succedono nel progresso della scienza. Così il calore, che già accennammo avere ricevuto una spiegazione cinetica nel modello dei gas di D. Bernoulli, viene concepito come un fluido nelle ricerche calorimetriche di Black (1728-1799), e più tardi nella teoria della propagazione di Fourier (1768-1830); il concetto cinetico di esso ha trionfato definitivamente soltanto dopo la scoperta della *conservazione dell'energia* di Roberto Mayer (1814-1878), con Joule, Colding e Helmholtz.

Il positivismo, che ha trovato la sua espressione filosofica nell'opera di A. Comte (1798-1857) (e che verrà riaffermato come criterio della ricerca scientifica da E. Mach e W. Ostwald), riprende da Newton l'avversione alle ipotesi che oltrepassano la realtà fenomenica (eteri, fluidi, masse e moti nascosti), chiedendo che il determinismo fenomenico venga rappresentato con equazioni in cui entrino soltanto dati sperimentalmente misurabili. In questo senso la teoria della propagazione del calore di Fourier pareva a Comte il modello della teoria scientifica (sebbene invero contenesse come implicito postulato metafisico quel principio di conservazione che doveva cedere più tardi alla veduta cinetica).

A. M. Ampère — che Maxwell chiamerà il Newton dell'elettricità — si ispirava pure al criterio positivistico scrivendo la sua « Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience » (1876). Dice: « Il maggiore vantaggio delle formule così dedotte, derivandole immediatamente da alcuni fatti generali, desunti da osservazioni in numero sufficiente a che la loro certezza risulti incontestabile, sta nel rimanere indipendenti, sia dalle

ipotesi di cui si fossero valsi gli autori per la ricerca delle formule stesse, sia dalle altre che eventualmente nel seguito vi si sostituissero ».

Anche nella Chimica la concezione atomistica democritea ripresa da R. BOYLE (1627-1691) doveva lottare lungamente colla veduta delle « qualità » aristoteliche. La stessa *legge* di combinazione delle sostanze secondo *proporzioni definite* (di peso), che DALTON interpretava secondo la nuova *teoria atomica* (1808), mirabilmente sviluppata da BERZELIUS (1826), veniva tradotta da WOLLASTON nel linguaggio scettico degli equivalenti. In fatto la teoria atomica riusciva a trionfare definitivamente in questo campo solamente nel 1860, quando CANNIZZARO, KÉKULÈ e WURTZ ebbero superato le difficoltà inerenti alla legge di combinazione dei gas secondo proporzioni definite di volume, richiamando la celebre *ipotesi d'Avogadro*.

4. - CONTRASTO DI MENTALITÀ

Nel contrasto fra le tendenze meccanicistiche e la concezione positivistica delle teorie si fanno valere non soltanto ragioni obiettive attinenti alla difficoltà di rappresentare questi o quei fenomeni, sì anche ragioni subiettive, che tengono alla mentalità degli investigatori. In ispecie i « visivi » cercano nel meccanismo la rappresentazione intuitiva della macchina. L'ideale della spiegazione fisica è chiarito in questo senso della visione concreta da WILLIAM THOMSON (Lord Kelvin): « Mi sembra che il vero senso della domanda: comprendiamo o non comprendiamo un dato soggetto di fisica — sia questo: possiamo costruire il modello meccanico corrispondente? » [1].

Di fronte ai visivi stanno altri spiriti astratti, che si scandalizzano di questa concezione del « comprendere »: « Una teoria fisica — dice P. DUHEM [2] — sarà un sistema di proposizioni logicamente concatenate, e non un susse-

---

[1] *Lectures on molecular dynamics*, Londra 1904, pag. 131.
[2] *Théorie physique*, Parigi 1915, pag. 172.

guirsi di modelli meccanici o algebrici; tale sistema avrà per oggetto non la spiegazione, ma la rappresentazione d'un complesso di leggi sperimentali ».

Ma non si tratta soltanto di differenze psicologiche fra spiriti visivi, o auditivi o astratti. C'è invero una ragione fondamentale che riporta continuamente i costruttori delle dottrine scientifiche al di là del semplice fenomeno: ed è l'esigenza *a priori* di concepire i rapporti di causa ed effetto come azioni propagantisi per contiguità nello spazio e nel tempo; perciò appunto si è introdotta l'ipotesi dell'etere o di qualche altro supporto o mezzo di trasmissione della luce, riuscendo impossibile concepire che essa si comunichi senza intermediario dalle più lontane stelle fino a noi, a distanza di spazio e di tempo. Qualunque cosa si voglia pensare intorno alle questioni gnoseologiche che qui prendono origine, questo occorre riconoscere: il progresso della fisica teorica, che prende inizio dal programma della spiegazione meccanica, è valso a conferire alle matematiche il suo significato proprio come organo della scienza razionale: e tale significato sopravvive alla stessa idea meccanica anche nel concetto dei più rigidi positivisti.

H. Hertz, che d'altra parte non si perita di disegnare il tipo più generale di meccanismo cartesiano atto a soddisfare lo spirito intuitivo, definisce il *contenuto positivo* delle dottrine, indipendente dalla spiegazione meccanica: « Alla domanda: — che cosa è la teoria di Maxwell? — non saprei dare risposta più netta e più corta di questa: è il sistema delle equazioni differenziali di Maxwell » [1].

5. - Calcolo delle probabilità

Nel progresso delle teorie fisiche che, come abbiam detto, prende origine dall'idea della spiegazione meccanica, le esigenze della Fisica reagiscono a loro volta sull'istrumento

---

[1] *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kräfte*, Lipsia 1892, pag. 23.

matematico e ne promuovono in sensi diversi una più larga estensione.

Un esempio caratteristico viene offerto dal *calcolo delle probabilità* (1).

L'idea che sta a base di questo calcolo deriva dai computi intorno ad una equa disposizione e ripartizione dei rischi e dei guadagni nei giuochi d'azzardo. Computi corretti in questo senso si trovano già in G. CARDANO e GALILEO. Più tardi B. PASCAL e P. FERMAT, in una corrispondenza epistolare del 1654, risolvono diversi problemi su tali giochi, che erano stati proposti dal cavaliere De Méré: qui appare implicitamente la nozione della *speranza matematica*, che doveva essere chiarita da HUYGENS tre anni dopo. Il calcolo delle probabilità veniva poi sviluppato da GIACOMO BERNOULLI nell'*Ars coniectandi*, pubblicata nel 1713, otto anni dopo la morte dell'autore. Un secolo più tardi LAPLACE ne offriva una trattazione sistematica con la *Théorie analytique des probabilités* del 1812.

Fin quasi dalle sue origini si erano vedute le applicazioni possibili del nuovo calcolo alla statistica e all'attuaria (assicurazioni, ecc.). HUYGENS nel 1669 trattava già delle assicurazioni vitalizie sopra due teste, e il calcolo delle rendite vitalizie si trova poi in un documento ufficiale presentato agli Stati generali d'Olanda dal matematico e uomo di stato JOHN DE WITT.

Ma le applicazioni in questo senso, su cui più avanti torneremo a discorrere, non sarebbero ancor valse a conferire al calcolo delle probabilità un posto altrettanto alto di quello che compete agli altri rami delle Matematiche, siccome organo della scienza razionale esatta. Questo posto il calcolo delle probabilità ha acquistato in seguito alle considerazioni introdotte da CLERK MAXWELL nella teoria cinetica dei gas; e da quell'epoca l'importanza eminente del nuovo calcolo si è fatta riconoscere in modo sempre più largo.

Abbiamo accennato al modello cinetico dei gas costruito

---

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Probabilités dans les différentes branches de la science*. Parigi, Hermann, 1937.

da Daniele Bernoulli: il gas è costituito da un sistema di punti materiali elastici liberamente mobili ed urtantisi tra loro; la velocità è uguale per tutte le particelle e significa la temperatura, la pressione sulle pareti è l'effetto degli urti su queste delle particelle mobili. Ora questo modello, pure accordandosi con le leggi ideali dei gas perfetti, contravviene al *principio della ragion sufficiente*: non c'è motivo perchè le particelle del gas siano animate dalla stessa velocità, e quand'anche lo fossero in un momento iniziale, le velocità diventerebbero dopo disuguali, in seguito agli urti molecolari. Conviene dunque ammettere che le particelle elementari del gas si muovano con le velocità più diverse, ed anzi che si trovino valori della velocità grandi e piccoli ad arbitrio, compresi entro certi limiti. Al posto dell'ordine e della regolarità che vedevamo nello schema di Bernoulli si ha ora dinanzi agli occhi un modello dell'assoluto disordine. Ma Maxwell ha concepito l'idea geniale che le leggi dei gas che si tratta di spiegare esprimano soltanto le regolarità statistiche rappresentanti l'aspetto di *media* dei fenomeni considerati.

In tal guisa s'introduceva per la prima volta nella scienza un concetto affatto nuovo delle *leggi della natura*, che fin dai tempi di Galileo erano considerate come rapporti elementari semplici nei quali si ravvisa l'intimo ordine matematico dell'universo, e che con la loro sovrapposizione producono la complessa molteplicità dei fenomeni. Secondo il nuovo concetto, i fenomeni elementari offriranno invece lo spettacolo della più grande e disordinata varietà, ma l'ordine della natura risulterà invece dagli effetti di media, appunto come ordine probabilistico.

6. - Il secondo principio della termodinamica e i fenomeni irreversibili

Quest'idea, che viene suggerita dalle speculazioni di Maxwell, si è andata a grado a grado affermando nel progresso delle teorie moderne, e più di recente nell'Elettrodinamica e nella Fisica dell'atomo. Ma una tappa essenziale della sua

evoluzione storica è costituita dal problema dei *fenomeni irreversibili*, a cui ha dato luogo il riconoscimento del secondo principio della Termodinamica (CLAUSIUS, 1866).

Il calore non può passare senza lavoro da un corpo più caldo ad uno più freddo; perciò le trasformazioni dell'energia per cui l'energia dinamica o un'altra qualunque forma di energia si scambia in calore, sono privilegiate rispetto alle trasformazioni in senso inverso. In altre parole, il corso degli eventi della natura presenta un aspetto non invertibile; e del resto siamo familiarizzati col fenomeno che ci viene offerto dal germinare del seme o dalla crescita dell'albero, ma non abbiamo mai visto, e non sapremmo nemmeno concepire, lo spettacolo dell'evoluzione inversa: l'albero che regredisce fino a rientrare nel seme da cui ha preso origine!

Che cosa c'è di singolare o di paradossale in queste ovvie considerazioni? Per quanto semplici, non pare che si siano presentate ai primi teorici del meccanicismo, o che questi abbiano scorto la difficoltà che esse involgono [1]. Invero le equazioni della Meccanica, anche nella forma più generale di Lagrange, rappresentano sempre fenomeni reversibili: se un sistema dinamico, a partire da una configurazione e da date velocità iniziali, perviene a una certa altra configurazione e con determinate velocità, esso, viceversa, partendo da quest'ultima configurazione con velocità invertite, percorrerà in senso inverso la medesima serie di configurazioni.

Per risolvere la difficoltà che qui si presenta, L. BOLTZMANN (1866-68-87) ricorre ai concetti probabilistici. Si considerino due polveri A e B, che vengano insieme mescolate; fra gli innumerevoli stati in cui esse possono trovarsi sono estremamente più frequenti quelli in cui le due polveri vengono intimamente mescolate, in confronto a quelli in cui esse appaiono separate. Eppure ad ogni moto di agitazione che fa passare da uno stato di separazione a uno stato di miscuglio corrisponde certo un moto possibile in senso inverso.

---

[1] Queste vengono esposte in modo drammatico da PH. BRÉTON, *La réversion ou le monde à l'inverse*, Parigi, 1876.

Così il fenomeno, che pure è schiettamente meccanico, presenta un aspetto irreversibile; diciamo, se si vuole, soltanto un aspetto probabile, ma nella pratica la grande probabilità si confonde con la certezza.

In quest'ordine d'idee, il secondo principio della Termodinamica, cioè il senso privilegiato di trasformazione delle varie energie in calore, esprimerebbe appunto una legge statistica, per cui in tutto l'Universo i *moti disordinati* (piccole agitazioni delle particelle elementari, che costituiscono il calore) tenderebbero a crescere in confronto ai *moti ordinati*. Diciamo *legge statistica*, che dà luogo ad un'aspettativa assai vicina alla certezza, ma non una verità assoluta. Se una pentola d'acqua è posta sopra il fuoco, dopo qualche tempo l'acqua bolle; si deve ritenere che questo fatto sia soltanto estremamente probabile, senza escludere la possibilità teorica che in rarissimi casi si trovi invece nella pentola un pezzo di ghiaccio!

A primo aspetto la mente si ribella ad ammettere una cosa di tal genere; ma la riflessione indica pure altri fatti, teoricamente possibili, che per la loro improbabilità ci apparirebbero ugualmente assurdi. Citiamo, a questo proposito, il mito delle scimmie dattilografe di E. Borel: una moltitudine di scimmie pestano a caso sulle tastiere di tante macchine da scrivere: chi mai pretenderebbe di ottenere in tal guisa, scritti foglio a foglio, tutti i libri che costituiscono la biblioteca del *British Museum*? La realizzazione di un tale concorso di circostanze fortuite, se pure teoricamente possibile, è così assurdo come il congelarsi dell'acqua nella pentola al fuoco.

7. - Isteresi e meccanica ereditaria

Un altro esempio caratteristico dell'impulso che le matematiche posson trarre dalla fisica ci viene offerto dai fenomeni di *isteresi* (elastica ed elettromagnetica), i quali suscitano una particolare difficoltà nei riguardi della spiegazione meccanica. Una molla tesa ritorna allo stato di equilibrio anteriore, ma poi si comporta di fronte a successive tensioni

come se si ricordasse del trattamento subito in passato. Similmente il ferro presenta fenomeni di apparente memoria rispetto alla magnetizzazione e smagnetizzazione. In quest'ordine di fenomeni il passato sembra influire sul futuro, non già attraverso lo stato presente, ma per la semplice circostanza di aver esistito.

In ciò si ha una contraddizione al principio della Dinamica classica, che gli stati futuri di un sistema (posizioni e velocità dei suoi punti materiali) dipendono soltanto dallo stato attuale, o — più precisamente — dalle posizioni e dalle velocità iniziali dei punti del sistema: il cui moto viene determinato dalle equazioni differenziali del 2° ordine, che legano le forze agenti sul punto colle accelerazioni. Le leggi dinamiche escludono così l'influenza del passato che non si trasmetta per contiguità attraverso il presente. C. Robin esprimeva questo postulato dicendo che alla base della meccanica classica sta un'*ipotesi di non-eredità*.

I fenomeni d'isteresi sopra ricordati suggeriscono di allontanarsi da questo meccanicismo classico studiando invece delle *meccaniche ereditarie* in cui il moto del sistema venga determinato da tutti gli stati del passato. Allora al posto delle equazioni differenziali interverranno equazioni di un tipo superiore traducenti il legame fra la funzione incognita ed altre funzioni date, quali sono le *equazioni integrali* ed *integro-differenziali* (cfr. Libro III, § 14).

È ben vero che l'ipotesi ereditaria si può sempre ricondurre al meccanicismo classico, postulando moti e masse nascosti, secondo la via segnata da Hertz. Se, per esempio, si suppone che l'intero spazio sia riempito di un fluido, o *etere*, i fenomeni visibili delle masse corporee che in esso si muovono, vengono naturalmente legati ai moti nascosti dell'etere, in virtù dei quali può presentarsi un'eredità apparente, così come nascono delle apparenti forze a distanza, dove pure le azioni reali si propaghino per contatto. Nello stesso modo quando un corpo solido mobile nell'acqua ritorna alla posizione iniziale, il liquido che lo circonda ha subìto pure un effetto per questo movimento, sicchè le azioni inerenti al corpo stesso possono apparire mutate in dipendenza di un

passato, che è presente nello stato del mezzo liquido e non nel solido. Così in generale: « *l'ipotesi di un determinismo ereditario si può surrogare con un'ipotesi di solidarietà universale dei fenomeni* » [1].

Sotto l'aspetto metafisico questa ipotesi è assai più soddisfacente in confronto dell'ipotesi ereditaria, perchè le azioni a distanza, nel tempo come nello spazio, sono inconcepibili alla nostra mente; sicchè già NEWTON accettava le forze attrattive gravitazionali dando loro il valore di un « come se », cioè di un dato di fatto da spiegare: « rationem vero harum gravitatis proprietatum nondum potui deducere et hypotheses non fingo ». Ma proprio secondo l'esempio di Newton, l'introduzione del *linguaggio* dell'eredità ha il vantaggio di porgere un'espressione *positiva* di molti ordini di fatti, raffigurando il dato immediato dell'esperienza sui corpi, senza bisogno di sovrapporvi una realtà invisibile.

Nei casi d'isteresi sopra ricordati si può ammettere semplicemente che la prima tensione o magnetizzazione della molla o del ferro abbia modificato, in maniera non visibile, la struttura molecolare del corpo, sicchè il ritorno alle condizioni di prima sia solo apparente. Ma non è fuori di luogo chiedersi se comunque lo stato visibile del corpo possa riconoscersi come conseguenza della serie degli atti visibili, più vicini o lontani, per cui esso è passato: nasce allora il problema di determinare una funzione che dipenda da tutti i valori di un'altra funzione, secondo un legame che viene espresso dalle equazioni di nuovo tipo sopra accennate.

Questo senso positivo della Meccanica ereditaria viene illustrato da P. PAINLEVÉ in un articolo su « Les Méthodes dans les sciences » pubblicato nella « Nouvelle collection scientifique » del Borel: « Considérons, par exemple, deux clous sortis de la même fabrique, mais dont l'un a été martelé à plusieurs reprises, tandis que l'autre restait dans un tiroir. Le premier clou n'est pas dans le même état moléculaire que le second, il a subi des déformations permanentes; une étude microscopique suffisamment précise nous le montrerait. Mais

---

[1] Cfr. F. ENRIQUES, *Problemi della scienza*, 1906, cap. VI.

si nous ne possédons pas de microscope assez puissant, les deux clous nous sembleront identiques; nous serons incapables de discerner les différences de leur état moléculaire actuel. Qu'on nous dise alors que le premier clou a été martelé et comment il l'a été: nous serons avertis du genre de déformation qu'il a subi; la connaissance du passé du clou supplée provisoriement a l'absence du microscope. L'histoire d'un corps vient en aide à l'impuissance actuelle de notre technique... il faut se garder de tirer d'une méthode transitoire des conclusions aussi aventureuses qu'injustifiées et notamment de l'opposer à la doctrine copernicienne ».

BIBLIOGRAFIA

F. Enriques, *Problemi della scienza*. Bologna, Zanichelli, 1906.

F. Enriques e G. De Santillana, *Compendio di storia del pensiero scientifico*. Bologna, 1937.

E. Picard, *La mécanique classique et ses approximations successives*, in « Scientia », I, 1907.

V. Volterra, *L'applicazione del calcolo ai fenomeni di eredità*, in « Revue du Mois », 10 maggio 1912.

Cfr. *Saggi scientifici*. Bologna, Zanichelli editore.

8. Le matematiche nel processo induttivo e unificativo della scienza

La teoria matematica mercè cui si svolgono deduttivamente le conseguenze fisiche di certi principii o ipotesi, diventa a sua volta momento di una successiva induzione, che conduce a correggere ed allargare il significato delle premesse supposte e quindi ad unificare la visione di diversi ordini di fenomeni. Il passaggio all'induzione estensiva si fonda spesso sulla ragion sufficiente ed anche sull'analogia formale. Quando Newton riuscì a spiegare, colla reciproca attrazione del sole e dei pianeti, le orbite ellittiche descritte da questi secondo le leggi di Keplero, non esitò a supporre che la forza attrattiva dovesse esercitarsi similmente anche fra i pianeti, introducendo così le *perturbazioni* dei moti planetari, che rispondono a una veduta più esatta della dinamica celeste.

L'analogia gioca più espressamente nel progresso unificativo di molte teorie fisiche. L'esempio più bello viene offerto dalla costruzione maxwelliana della *teoria elettro-magnetica della luce*. CLERK MAXWELL (1870) avendo scorto l'analogia del fenomeno della luce con quello che sarebbe offerto da ipotetiche onde elettro-magnetiche, e riconosciuto che queste dovrebbero propagarsi colla medesima velocità, fu tratto senz'altro a supporre l'identità di natura dei due ordini di fenomeni, ammettendo che le onde luminose si riducano effettivamente ad onde elettro-magnetiche di piccolissima lunghezza. Un mondo nuovo, non mai veduto, sorgeva così dinnanzi agli occhi del matematico; e si sarebbe potuto credere ad un sogno poetico. Ma 17 anni più tardi la previsione veniva realizzata nelle esperienze di H. HERTZ. I due campi di studio della luce e dell'elettro-magnetismo si fondevano pertanto in una unica teoria più comprensiva!

Il processo di unificazione delle dottrine tende ad una scienza totalitaria che dovrebbe rispecchiare nella sua interezza, e nella forma più economica, il determinismo universale della Natura. L'ideale di questa scienza veniva già formulato da S. LAPLACE in un passo celebre del suo « *Essai philosophique sur les probabilités* »: « Un intelletto che, a un certo momento, conoscesse tutte le forze che animano la natura e la rispettiva situazione degli esseri che la compongono, e fosse del pari abbastanza vasto per sottoporre questi dati all'analisi, comprenderebbe nella medesima formula i moti dei massimi corpi dell'universo e quello del più leggero fra gli atomi: nulla gli rimarrebbe incerto e l'avvenire sarebbe, come il passato, presente al suo sguardo. Lo spirito umano offre, con la perfezione che seppe dare all'astronomia, una pallida idea di siffatto intelletto ».

9. - SUPERAMENTO DEL MECCANICISMO

Circa settant'anni or sono, dopo la fondazione dell'energetica, appariva ancora possibile di realizzare l'unificazione delle dottrine fisiche nel senso del meccanicismo, in particolare spiegando cineticamente i fenomeni elettro-magnetici.

Da MAXWELL a LORD KELVIN, a LARMOR, si sono fatti a tale scopo numerosi tentativi.

Ma infine gli sviluppi della teoria elettromagnetica di LORENTZ da una parte, e quelli della fisica delle radiazioni dall'altra, hanno condotto a una conclusione inaspettata: che la dinamica di Galileo-Newton non ha un valore assoluto, anzi esprime soltanto una scienza approssimata valida per velocità non troppo grandi; e che l'unificazione della scienza del moto e dell'elettromagnetismo meglio può essere realizzata invertendo il senso tradizionale della spiegazione, riducendo non l'elettricità al moto, ma anzi il moto a fenomeni elementari del tipo elettrico.

Direttamente alla dottrina di Lorentz si riattacca la critica di ALBERTO EINSTEIN, che riprende contro Galileo e Newton la veduta cartesiana della relatività del moto (in accordo alle più recenti esperienze di MICHELSON): dalla quale sorge la nuova dinamica — *teoria generale della relatività* — a correggere il sistema classico. Qui appare che le differenze, generalmente insensibili nella descrizione dei moti planetari, sono tuttavia suscettibili di rivelarsi negli effetti che dipendono dai cosiddetti termini secolari (ad esempio nello spostamento del perielio di Mercurio).

In modo anche più profondo ha portato a riformare la dinamica classica lo studio delle radiazioni, e quindi la fisica dell'atomo basata sull'ipotesi dei *quanti* (PLANCK, EINSTEIN, BOHR, ecc.).

Questi sviluppi sembrano realizzare, in una maniera che richiama alla mente le antiche speculazioni pitagoriche, il disegno dell'*unità della materia*, ed aprono un nuovo immenso campo della ricerca matematica, che già si vede andare foggiando all'uopo nuovi istrumenti.

10. - MATEMATIZZAZIONE DELLE SCIENZE: APPLICAZIONI ALLE SCIENZE DELLA VITA

Abbiamo rilevato che traverso il meccanicismo, ma anche col cedere alle esigenze che portano a superarlo, il progresso della fisica tende a subordinare sempre più la descrizione dei

fenomeni a leggi matematiche, e che infine l'ordine matematico riesce a comprendere le proprietà della struttura della materia, e quindi la Chimica. Si può dubitare che qui si tocchi ad un limite necessario della matematizzazione delle scienze, perchè i fenomeni biologici e le espressioni più alte della vita, quali si hanno nel pensiero e nell'azione degli uomini entro la società, sembrano rivelare una spontaneità incompatibile colla pretesa di segnare leggi quantitative al loro prodursi. Ma, a prescindere dalla questione filosofica che qui si solleva, intorno ai limiti della spiegazione fisica, si riconosce ad ogni modo che numerosi fatti legati alla vita degli organismi, e anche al dinamismo delle società umane, rientrano nella fisica o sono ben concatenati in un preciso ordine deterministico, e comunque assumono un significato diverso in rapporto alla loro misura; sicchè danno luogo naturalmente ad una trattazione matematica.

L'indirizzo della spiegazione fisica, e più specialmente meccanica, dei fenomeni della vita, s'inizia collo studio del moto degli animali per opera di G. A. Borelli della scuola di Galileo e di Malpighi, e si prosegue in seguito alla scoperta della circolazione del sangue, colla concezione idrodinamica di tale processo. Le ricerche più moderne di Ed. Weber sulla meccanica dei muscoli e degli organi di moto, ecc., si riattaccano a questi precedenti.

Una vasta importanza per la comprensione dei processi negli organismi viventi ha acquistato, ai nostri giorni, la veduta chimica. E convien dire che tale disciplina non ha aspettato gli sviluppi delle teorie dell'atomo (che forse sono ancora lontane dal fornire utili spiegazioni in questo dominio) per dar luogo ad estese applicazioni delle matematiche. Basti citare le leggi della Termochimica di W. Gibbs, le equazioni che esprimono la velocità di reazione, ecc. Ne deriva una serie di casi importanti in cui la soluzione di un problema biologico (spesso d'interesse pratico per la medicina) viene a dipendere dall'uso delle matematiche. Un recente libro del Dott. Barbensi, offre in questo senso numerose esemplificazioni.

Ricordiamo ancora due altri campi, in cui si sono realiz-

zate notevoli applicazioni delle Matematiche: anzitutto la fisiologia, in ispecie la fisiologia dei sensi, nei lavori di HELMHOLTZ e della scuola che ne dipende, e poi — in un indirizzo affatto distinto — la considerazione delle forme geometriche della natura organica, studiate da D'ARCY THOMPSON.

Ma un campo più vasto in cui la biologia ha veduto costituirsi di recente un corpo di dottrina elevata che porta larghe conseguenze in accordo colle verifiche sperimentali, è la *teoria matematica della selezione naturale,* costruita da VITO VOLTERRA e da numerosi discepoli e continuatori, a cominciare dal 1926. Le concezioni di Darwin sono sviluppate qui, col sussidio dell'istrumento matematico, in forma quantitativa; dove la legge di Malthus (sul rapporto dell'accrescimento dei mezzi di sussistenza all'accrescimento della popolazione) viene ripresa nell'interpretazione già datale dal MESSEDAGLIA, cioè come legge di tendenza, traducibile in senso differenziale. La teoria spiega e mette in evidenza le leggi di fluttuazioni delle diverse specie biologiche che convivono in un medesimo ambiente, disputandosi lo stesso nutrimento, ovvero nutrendosi le une delle altre.

BIBLIOGRAFIA

W. M. FELDMANN, *Biomathematics*. Londra, 1923.

R. MARTIN, *Anthropometrie*. Berlino, 1925.

P. RIEBESELL, *Die mathematischen Grundlagen der Variations - und Vererbungslehre*. Lipsia e Berlino, 1916.

G. U. JULE, *An Introduction to the theory of Statistics*, 7ª ed.

C. P. DAVENPORT, *Statistical methods with special reference to biological variation*. New York e Londra, 1899.

W. JOHANNES, *Elemente der exakten Erblichkeitslehre*. Jena, 1926.

M. BOLDRINI, *Biometrica*. Padova, 1927.

M. BOLDRINI, *Biometria e Antropometria*, in « Trattato elementare di statistica », diretto da C. Gini. Milano, 1934.

J. MC LEOD, *The quantitative method in Biology*. Londra, 1919.

R. A. FISHER, *Statistical methods for research worker*. 3ª ed. Londra, 1930.

E. WEBER, *Variations - und Erblichkeits - Statistik*. Monaco, 1935.

G. BARBENSI, *Elementi di matematica generale ad uso dei biologi e dei chimici*. Firenze, 1936.

Un indirizzo interessante di applicazioni delle matematiche alla biologia è rappresentato da:

W. D'Arcy Thompson, *On Growth and Form.*

Sulla teoria matematica della lotta per la vita:

V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, rédigées par M. Brélot. Parigi, 1931.

Vasta bibliografia dell'argomento in:

Volterra e D'Ancona, *Les Associations biologiques au point de vue mathématique*. Parigi, 1935.

11. - Biometria e Statistica

C'è un intero ordine di applicazioni delle Matematiche alla scienza biologica, che si riattacca al Calcolo delle probalità e ai metodi statistici, largamente usati anche per riguardo alla società umana.

Le più semplici concezioni di probabilità entrano già nella formulazione delle note leggi di Mendel [1] dell'eredità, dove certi caratteri dei genitori si trasmettono ai discendenti secondo regole di combinazione di oggetti, che si rispecchiano in proporzioni statistiche.

Per comprendere le più elevate applicazioni del calcolo delle probabilità alla biometrica, giova ricordare la « *curva degli errori d'osservazione* » di Gauss. Quando si misura con precisione, per esempio una data lunghezza, avviene di trovare misure discordanti di poco da un'operazione all'altra, che perciò resultano affette da *errori* d'osservazione. Ora, prescindendo dagli errori sistematici, cerchiamo di rappresentare gli errori accidentali con un diagramma, segnando sull'asse delle x i punti accidentali di una serie d'intervalli Δx, $2\Delta x \ldots$, $-\Delta x$, $-2\Delta x \ldots$, e costruendo, per l'ascissa $x+\Delta x$, il punto di ordinata y tale che $y\Delta x$ rappresenti la *frequenza* degli errori compresi fra x e $x+\Delta x$, cioè il rapporto del loro numero al numero totale delle osservazioni. Questo diagramma discontinuo, al decrescere di Δx, conduce come limite ad una curva continua che ha un'equazione esponenziale, del tipo $z=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$, cioè alla curva di Gauss.

---

[1] Cfr. p. es. P. Enriques, *Il problema della vita*. Bologna, Zanichelli, 1937.

La detta curva rispecchia la *legge normale* degli errori accidentali che si commettono nelle misure geodetiche ed astronomiche. Essa si ritrova, più o meno approssimativamente, come espressione della regolarità statistica di molti avvenimenti casuali o dipendenti da cause accidentali, anche legati alla volontà umana, per esempio: altezze, pesi, dimensioni di certi organi, nascite, morti, matrimoni, delitti, ecc., entro un gruppo sociale omogeneo.

Ma lo scostamento dalla legge normale lascia scorgere, in generale, le cause sistematiche che possono modificare, in più sensi, la regolarità dei casi presi in esame. Così quando si esamini un gruppo resultante dalla mescolanza di due popolazioni diverse, il diagramma assume una forma più complicata, conducendo ad una curva composita, che si lascia ridurre alla combinazione di due curve di Gauss con coefficienti diversi.

Su questo principio è fondato lo studio delle specie o delle razze colla biometrica: la statistica di certi caratteri somatici dà una analisi dei gruppi considerati, decomponendoli nei tipi differenti che li compongono.

L'ordine di studi così appena accennato, e più in generale le applicazioni della analisi matematica alla statistica teorica, han ricevuto un forte incremento per opera di K. Pearson, ed ha trovato un organo di diffusione nella rivista *Biometrika* fondata col Galton e col Weldon, e da lui stesso diretta dal 1902 al 1924.

Dal 1935 si pubblica a Chicago una rivista speciale *Psichometrika*.

12. - Economia

L'investigazione statistica è stata proseguita nel campo dei fenomeni economici, specialmente da Jevons, Irving Fisher, Edgeworth e Pareto. Qui si è reso palese che molti ordini di fenomeni non soddisfano alla legge normale di Gauss, come quelli su cui influiscono diverse cause perturbatrici.

Prendiamo, per esempio, la *curva* che dà la ripartizione

dei redditi. GALTON credeva che essa dovesse coincidere colla curva di Gauss, salvo una punta più bassa, che risponda all'eliminazione degli inetti. Invece la curva, di cui Pareto ha dato la formula, è essenzialmente diversa; BENINI e GINI hanno cercato di spiegare tale diversità, facendo giocare il fatto dell'eredità e la maggiore prolificità delle classi basse. Così dalla statistica economica sorgono nuovi problemi che si pongono al matematico.

Ma le applicazioni delle matematiche all'economia non si limitano alla statistica. Da poi che COURNOT ebbe insegnato a trattare matematicamente un caso semplice di monopolio, JEVONS, EDGEWORTH, WALRAS, PARÈTO e MARSHALL, hanno sviluppato in più sensi queste applicazioni. Specialmente Walras e Pareto hanno coltivato il disegno ambizioso di fondare una teoria economica pura interamente matematica, traducendo almeno l'ordine regolare della società nelle « equazioni differenziali dell'equilibrio economico ».

Non vogliamo esaltare questo indirizzo di studi, cui — non ingiustamente — è stato fatto il rimprovero di essere alquanto astratto e lontano da ciò che costituisce l'interesse proprio della scienza economica. Qui giova avvertire, in generale, che soltanto i fenomeni più semplici sono suscettibili di una rappresentazione analitica che li chiuda in un ordine compiuto di previsioni, traendo effettiva utilità dall'uso delle matematiche superiori. Ovunque si tratti di una realtà un po' complessa, una siffatta schematizzazione teorica riesce inadeguata allo scopo conoscitivo, e pertanto conviene appagarsi della ricerca di leggi ritraenti alcuni particolari aspetti dei fenomeni. Ciò non significa che la scienza debba fermarsi al puro stadio qualitativo, ma che — sollevandosi sopra di questo — essa può rilevare soltanto alcuni rapporti di quantità, e per ciò utilizzare con vantaggio considerazioni matematiche affatto elementari.

Per quel che si riferisce all'economia, l'oggetto stesso della scienza porta subito a valutazioni quantitative e così, fin dai suoi primi progressi, questo ramo di studi appartiene, in sostanza, alle matematiche. Dalla mentalità matematica dipendono, invero, la concezione dell'*homo oeconomicus* di

ADAMO SMITH e la legge della *rendita differenziale* di RICARDO, anche se i loro autori sieno stati piuttosto uomini di finanza che cultori dell'Analisi. E se il tentativo ambizioso dello sviluppo matematico cui si è accennato, non ha risposto in tutto alle speranze dei suoi autori, resta ad ogni modo che la critica dei concetti economici ha guadagnato in lucidità e precisione da un esame secondo lo spirito matematico.

BIBLIOGRAFIA

Per gli sviluppi dell'economia matematica vedasi:

V. PARETO, *Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie*, in « Enc. der math. Wiss. », I, 92 (1902).

Capitolo II.

MATEMATICHE E TECNICA

13. - Scienza e tecnica

Al posto che le matematiche tengono nel quadro generale delle scienze, risponde il fatto che esse sono riuscite ormai a dominare la nostra vita quotidiana, nelle applicazioni tecniche.

Applicazioni di questo genere si affacciano, come è naturale, già nel mondo antico: vero è che agl'inizi della civiltà, l'arte precede la scienza, ed anzi lo scienziato trae spesso occasione di meditare dall'osservazione di qualche meccanismo o congegno, sia pure rudimentale, costruito in vista di scopi pratici. Questa influenza della tecnica sulla ricerca scientifica è bene messa in luce da Galileo all'inizio dei suoi « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze »: « Largo campo di filosofare a gl'intelletti speculativi parmi che porga la frequente pratica del famoso arsenale di voi, Signori Veneziani, ed in particolare in quella parte che meccanica si domanda; atteso che quivi ogni sorte di strumento e di machina vien continuamente posta in opera da numero grande d'artefici, tra i quali, e per l'osservazioni fatte dai loro antecessori, e per quelle che di propria avvertenza vanno continuamente per sè stessi facendo, è forza che ve ne siano dei peritissimi e di finissimo discorso ».

14. - Statica

Ma se, dunque, la tecnica precede nei suoi inizi la scienza, a sua volta la scienza sviluppata reca perfezionamento alla

tecnica. E questo già accade nell'antichità, ad esempio per ciò che si riferisce alle costruzioni edilizie, ai ponti, ecc. La statica, il cui studio teorico fu sistemato da Archimede, ha portato un necessario ausilio al compimento delle grandi opere dell'epoca greco-romana. A questo proposito, anzi, si narra che in secoli posteriori (VI sec. e. v.), essendosi perduta tra gl'ingegneri la tradizione degli studi matematici, ebbero ad incontrarsi notevoli difficoltà nella costruzione della cupola di S. Sofia a Bisanzio: questa rovinò due volte, e per apprendere le nozioni tecniche occorrenti a conferirle la necessaria stabilità, dovette appositamente riaprirsi una scuola di geometria e di meccanica.

15. - Resistenza dei materiali

Nelle costruzioni moderne non entra in considerazione soltanto la conoscenza della Statica: a confronto delle antiche, in cui il problema della sicurezza viene risolto empiricamente con l'esuberanza del materiale, la nostra civiltà ha dato allo sviluppo dell'ingegneria un nuovo senso economico, che trae origine dalla misura degli sforzi e delle resistenze della materia impiegata.

Appunto il calcolo della *resistenza dei materiali* costituisce un complesso di dottrine che sta oggi alla base di tutta la scienza delle costruzioni, sia edilizie sia meccaniche. Qui si presenta al tecnico il problema di fissare le *dimensioni* degli elementi costruttivi, cioè essenzialmente quello di stabilire la quantità minima di materiale occorrente, perchè la costruzione, in perfetta corrispondenza al suo scopo, risulti stabile e sicura. Il materiale impiegato deve resistere alle sollecitazioni cui verrà sottoposto, e nel calcolo di esse conviene lasciare un sufficiente margine di sicurezza: ma non si vuole nemmeno largheggiare in misura eccessiva, accrescendo il costo dell'impresa al di là di ciò che un prudente giudizio stabilisca come necessario. Dunque, se si voglia mettere in opera una trave soggetta a flessione, sarà prudente largheggiare nelle dimensioni previste, per modo che la massima

sollecitazione a cui il materiale verrà sottoposto sia — per esempio — la decima parte del *carico di rottura*; ma è praticamente inutile ed economicamente dannoso accrescere le dimensioni così calcolate.

Ora, tutto il calcolo delle dimensioni dipende dall'uso di procedimenti matematici, che costituiscono appunto la *scienza delle costruzioni*.

In primo luogo, poichè si debbono ricercare sempre deformazioni elastiche e non permanenti, c'è qui un campo di applicazione della generale teoria dell'elasticità. Senonchè i fondamenti di codesta dottrina teorica introducono ipotesi semplificative tali che lo schema si allontana assai dalla realtà fisica; perciò si è costretti talvolta a rinunziare ad una trattazione analitica compiuta del problema, riducendosi all'uso di formule approssimative, o anche empiriche. Tuttavia entrano sempre qui dei concetti matematici: per esempio nello studio dei solidi sottoposti a flessione, si fa uso del cosiddetto *momento d'inerzia*, che è una somma di prodotti di elementi superficiali per i quadrati delle rispettive distanze da un asse; e se ne calcola la grandezza con procedimenti analitici o grafici. L'uso più vasto dei metodi grafici ricorre nel calcolo delle travature reticolari, e si riattacca ad una particolare disciplina geometrica, che è la *Statica grafica*, fondata da CULMANN e da CREMONA.

La straordinaria importanza dell'applicazione delle matematiche alla scienza delle costruzioni, si rivela in modo particolare in alcuni rami della tecnica moderna: sia nelle costruzioni in cemento armato (HENNEBIQUE), sia nei grattacieli americani, vere grandi conquiste dell'edilizia moderna. Tali costruzioni non sarebbero possibili senza l'uso sistematico del calcolo.

E nemmeno nel campo della meccanica, non si potrebbero usare organi soggetti a muoversi con velocità altissima, se non si sapesse risolvere il problema delle dimensioni strettamente necessarie per la sicurezza. Qui l'esigenza di non eccedere certi limiti è portata non soltanto da ragioni economiche, sì anche dalle necessità di funzionamento della mac china.

16. - Macchine a vapore

Per quel che riguarda le macchine, lo scopo economico da raggiungere non consiste tanto nel limitare il materiale della costruzione, quanto nell'ottenere il massimo lavoro col minimo dei mezzi, cioè nell'aumentare il rendimento.

Le macchine a vapore, le prime fra le macchine termiche (in ordine cronologico), non sono state inventate da matematici, quantunque i più antichi meccanismi in cui il vapore viene adoperato come forza motrice risalgano ai giocattoli di Erone [1]. Sono in generale degli oscuri artefici, dotati di una particolare immaginativa, che sono stati tratti da diversi motivi a ideare i primi congegni di tali macchine.

Ma perchè le macchine a vapore, sia fisse sia mobili, potessero entrare utilmente nell'industria e nella pratica della vita, è occorso studiare col sussidio delle matematiche il problema del loro rendimento, ed è qui l'inizio della *Termodinamica,* con gli studi di Sadi Carnot del 1824. I concetti di questo ramo della scienza sono entrati siffattamente nell'uso degl'ingegneri, che essi rappresentano comunemente il ciclo di funzionamento della macchina mediante il cosiddetto *diagramma entropico,* dove viene figurata, in funzione della temperatura, la variazione di quell'integrale di differenziale esatto che definisce l'entropia.

17. - Motori a scoppio

L'applicazione del calcolo non riesce soltanto a rendere utili le macchine a vapore, ma suscita anche la ricerca di altre macchine termiche, e in particolare di quelle dove il motore può fornire una grande quantità di lavoro sotto piccolo peso.

Tali sono, tra i cosiddetti motori a combustione interna, i motori a scoppio, in cui l'esplosione di una miscela d'aria

---

(1) V. Enriques e De Santillana, *Storia del pensiero scientifico; Il mondo antico.* Bologna, 1932, pagg. 495-97.

e benzina libera una grande quantità d'energia. Questi motori hanno ricevuto la più larga applicazione nell'automobile e perfezionati con lo studio sempre più preciso della loro economia, hanno fornito il mezzo per risolvere un problema che ha sollecitato nei secoli l'aspirazione degli uomini, dando loro modo di levarsi a volo nell'aria: i tentativi ingegnosi, che risalgono a Leonardo da Vinci, per imitare l'apparato di volo degli uccelli, sarebbero rimasti vani senza la soluzione del problema energetico!

18. - Forma dei veicoli

L'applicazione dei motori ai mezzi di trasporto, sul mare o nell'aria e quindi anche sulla terra, porta a nuovi e complessi problemi di idrodinamica e di aerodinamica: sulla forma da darsi al veicolo per vincere meglio la resistenza del fluido che si attraversa, e poi su quella del propulsore ad elica, ecc. Qui convien dire che la realtà complessa dei fenomeni non è ancora bene rappresentata dagli schemi teorici che i matematici hanno costruito per comprenderla. Basti ricordare che, secondo la pura idrodinamica classica, il moto d'un solido entro un liquido (perfetto) non incontrerebbe resistenza alcuna: è questo il celebre paradosso di d'Alembert, che molti analisti hanno tentato in vari modi di spiegare. Comunque, i problemi pratici che occorrono nella tecnica anzidetta si affrontano vantaggiosamente con metodi matematici, sia pure adottando caso per caso formule empiriche o ipotesi semplificative. Ricorre anche l'uso di nozioni assai elevate, per esempio delle funzioni di variabile complessa. Grazie a questi studi sulla forma dei veicoli, si è riusciti negli ultimi tempi ad accrescere enormemente la velocità delle navi e degli aeroplani, ed anche dei treni e delle automobili.

Ritorna alla mente la perorazione commossa dell'ode di Vincenzo Monti al signor di Montgolfier:

Umano ardir, pacifica
Filosofia secura,
Qual possa mai, qual limite
Il tuo poter misura?

Senonchè il concetto espresso dal poeta, che di fronte all'uomo riuscito a « calcar le nuvole »

.... di natura stettero
le leggi inerti e mute,

non risponde affatto al significato della scienza: la quale c'insegna anzi a riconoscere le leggi naturali come espressione d'un ordine dato cui conviene obbedire per piegarlo agli scopi umani.

19. - Motori idraulici

Un rendimento assai più grande, in confronto alle macchine termiche, è dato dai motori idraulici. Dalle prime ruote a palette fino alle moderne turbine, si ha qui un incessante progresso, che culmina in alcuni tipi contemporanei, ed appare associato allo studio teorico di grandi matematici.

La prima turbina è forse quella descritta nel 1750 da J. A. Segner, il quale esegue anche il calcolo delle forze in gioco. Delle macchine idrauliche si occupa poi L. Eulero, che nel 1755 pubblica la sua « Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau ». È anzi da notare che Eulero propose, in base alla teoria, dei perfezionamenti alle macchine di Segner, e che egli vide tanto lontano (anche dal punto di vista strettamente tecnico) che G. Zeuner, il trattatista classico delle turbine, dice nel suo libro [1]: « Le formule fondamentali per il calcolo delle turbine derivano da Eulero, poichè, fino al giorno d'oggi, per questo calcolo si parte dall'ipotesi dell'ingresso senza urto dell'acqua nel canale rotante ».

Sembra anche che si possa riconoscere una influenza reciproca dello studio tecnico sulla ricerca scientifica, nella circostanza che Eulero stesso, poco dopo le anzidette ricerche, fu condotto a stabilire le sue celebri equazioni dell'idrodinamica.

---

[1] G. Zeuner, *Vorlesungen über Theorie der Turbinen*. Lipsia, 1899.

Ritornando alle turbine, un vero progresso tecnico nella loro costruzione non poteva aversi naturalmente prima della loro utilizzazione industriale, che viene realizzata nel 1827 da FOURNEYRON, con le turbine radiali. Subito questo tipo di macchine diventa oggetto dello studio teorico. PONCELET nel 1838 pubblica la sua memoria: « Sur la théorie des effets mécaniques de la turbine Fourneyron ». Il grande matematico affronta la trattazione analitica dei fenomeni, mediante l'ipotesi semplificativa che il moto dell'acqua si faccia per filetti paralleli; l'ipotesi è ancora lontana dalla realtà, ma Poncelet ne corregge l'errore introducendo certi « coefficienti di contrazione ».

Lungo lavoro doveva farsi ancora per perfezionare la teoria analitica delle nostre macchine. Dopo i grandi Eulero e Poncelet, COMBES nel 1843 raggiunge un progresso col tener conto delle resistenze d'attrito e conforta i suoi studi teorici con l'esperienza; i risultati raggiunti vengono esposti nelle « Recherches théoriques et expérimentales sur les roues à réaction ou à tuyaux ».

Questi studi lasciano preconizzare altri tipi di macchine, quali sono le turbine del FRANCIS, in cui si realizza il fecondo principio dell'autoregolazione per mezzo del moto centripeto dell'acqua. In ogni modo, a questi nuovi tipi si applicano subito le teorie precedenti, nella ricerca di un rendimento migliore. S'introducono anche nuovi metodi di calcolo: citiamo l'uso delle coordinate cilindriche proposte dal PRASIL fin dal 1903 e sviluppato poi nell'importante lavoro di HANS LORENZ: « Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder ». Ulteriori perfezionamenti sono stati portati dal KAPLAN (1911 e seguenti). Ma, senza insistere su questa storia interessante, basti rilevare che si ha qui un esempio caratteristico e significativo della correlazione fra i procedimenti matematici e i problemi tecnici, poichè il progetto e la costruzione dei motori idraulici ha seguito passo a passo gli sviluppi della teoria.

L'esempio è tanto più istruttivo, in quanto si può cogliere sul vivo lo sforzo per adeguare progressivamente lo schema matematico alla realtà. In questa storia sono anche interessanti gli errori di valutazione, per cui talvolta si è riusciti a

complicare inutilmente il problema, con la conseguenza di non essere in grado poi di trattarlo con l'Analisi matematica, e quindi di dovere semplificare le formule, introducendo surrettiziamente nuove ipotesi perturbatrici. Un ammaestramento simile si ricava dal tentativo di Hans Lorenz, che, non appagandosi di ridurre la descrizione del moto del fluido a un problema unidimensionale, complica lo schema di Poncelet, ma per effettuare i calcoli è condotto ad adottare una semplificazione analitica, che si traduce nell'ipotesi d'un numero infinito di pale. Cosicchè la sua turbina diede al freno dinamometrico un rendimento massimo del 65 % (Reichel, 1913), assai inferiore a quello delle turbine normali [1].

20. - Elettrotecnica

Ci siamo indugiati sui motori idraulici, che ci hanno offerto un esempio tipico della correlazione tra gli studi teorici e tecnici. Dopo ciò, trascorreremo rapidamente su altri campi, in cui pure ricorre l'uso dei metodi matematici elevati.

Le applicazioni dell'elettricità sono entrate ormai nella nostra pratica quotidiana, ed hanno largo posto nell'industria; ma il volgo non sospetta quale mole di nozioni matematiche stia dietro a queste applicazioni.

La costruzione delle dinamo (che si basano sull'anello di Pacinotti) richiede l'istrumento matematico, ad esempio per le modalità della commutazione. Ma l'invenzione del campo magnetico rotante di Galileo Ferraris, su cui si fondano i motori polifasi, va collegata direttamente alla teoria matematica dei fenomeni.

Del resto, l'ufficio del matematico nel campo dell'elettrotecnica non si limita soltanto alla costruzione delle macchine. A lui spetta, per esempio, di risolvere il problema della distribuzione, segnando la reti e le linee dell'energia elettrica: il punto di partenza di questi studi è costituito dai prin-

---

(1) Per maggiori notizie sull'argomento cfr. A. Frajese, *L'idrodinamica e le teorie sulle turbine*. Roma, 1932.

cipi di KIRCHHOFF, in cui s'indaga appunto la « soluzione delle equazioni, cui conduce la ricerca della distribuzione lineare delle correnti » (1847). Più tardi, nello studio di queste reti, s'introducono con vantaggio le funzioni iperboliche e i numeri complessi, nel cosidetto « metodo simbolico », fondamentale per la conoscenza delle correnti alternate (LODGE, 1883; STEINMETZ, 1893; KENNELLY, 1894; RUSSELL, 1894) [1].

Ricordiamo ancora che lo studio della trasmissione della corrente nelle linee telefoniche, che conduce ad integrare delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, ha recato effettivi perfezionamenti tecnici, quali furono realizzati dal PUPIN nel 1899 (linee *pupinizzate*).

21. - RADIOTECNICA

Un campo meraviglioso di fenomeni con cui ci ha ormai familiarizzato GUGLIELMO MARCONI, è la propagazione delle onde elettromagnetiche di HERTZ. Si è già avuto luogo di ricordare che la scoperta di questi fenomeni discende dalla teoria matematica di CLERK MAXWELL. Ma nell'applicazione tecnica, per la trasmissione delle onde a grande distanza, come occorre per il telegrafo e per il telefono senza fili, quanti problemi dipendenti dall'analisi matematica! Citiamo soltanto lo studio delle caratteristiche del circuito oscillante, in relazione alle variazioni della lunghezza d'onda, i calcoli relativi alle antenne (dove pure hanno trovato impiego le funzioni iperboliche), la teoria delle valvole termoioniche, ecc.

22. - CONCLUSIONE.

Senza indugiarci di più sull'argomento — e potremmo parlare ancora della rete geodetica, della navigazione, dell'arte della guerra (balistica, fortificazioni), ecc. — le cose dette chiariscono abbastanza che la vita industriale ed econo-

---

[1] Cfr. G. REVESSI, *La trasmissione e la distribuzione dell'energia elettrica*. Milano, Hoepli, 1926.

mica dei popoli civili è dominata dalle matematiche. C'è una gerarchia di esecutori che dipendono, in ultima analisi, da poche menti dirigenti, in contatto colla scienza pura più elevata: se le fonti del sapere teorico venissero a disseccarsi, qualora il pensiero fattosi dapprima incapace di progredire perdesse poi anche l'intelligenza delle nozioni acquisite e l'uso di esse nelle applicazioni, la civiltà andrebbe incontro ad una rovina o almeno ad un'eclissi d'incomparabile portata, siccome accadde alla fine del mondo antico.

BIBLIOGRAFIA

Alla storia della Tecnica sono specialmente consacrati i *Blätter für Geschichte der Technik* dell'Istituto austriaco per la storia della Tecnica a Vienna.

Una veduta sintetica delle applicazioni della scienza nel secolo XIX viene offerta dal volume pubblicato per cura di

D. Donati e F. Carli, *L'Europa nel secolo XIX*. Parte II: *Le scienze applicate*. Padova, 1932.

Capitolo III.

MATEMATICHE E FILOSOFIA

23. - Motivi matematici nella speculazione filosofica: filosofia antica

Nella storia del pensiero occidentale l'evoluzione delle matematiche s'intreccia strettamente con l'evoluzione della filosofia. Vedute matematiche influiscono già sulla speculazione dei più antichi naturalisti greci. Così una semplice osservazione di Anassimandro sulla relatività dell'« alto » e del « basso », in rapporto al mantenersi in equilibrio della Terra isolata nello spazio senza cadere, si vede subito dare impulso alle concezioni relativistiche nella critica dell'antropomorfismo teologico di Senofane e poi nelle filosofie di Pitagora e di Eraclito. Ma soprattutto per i pitagorici l'intera scienza e la filosofia pendono da una visione matematica del mondo. La crisi dei principi della geometria portata dalla scoperta degl'incommensurabili (riconoscimento del carattere razionale degli enti geometrici: punto senza estensione, linea senza larghezza, superficie senza spessore) costituisce insieme una crisi generale della scienza e del pensiero, quale si svolge nella dottrina degli Eleati, e da essa prendono origine i problemi della filosofia posteriore.

I motivi matematici di tutta questa speculazione, e in particolare quelli elaborati dai pitagorici, si trovano alla base del razionalismo, riaffermato avverso l'empirismo dei Sofisti da Democrito e da Platone. Democrito, che ha contribuito direttamente allo sviluppo della geometria, resta come primo autore del sistema del materialismo, che nell'epoca moderna fornirà alla scienza il programma della spiegazione meccanica universale, di cui sopra abbiamo discorso.

Platone trae dalla veduta degli enti matematici la sua *teoria delle Idee*: e già questo termine, che in greco significa *figure* o schemi, deriva dal linguaggio matematico dei pitagorici e di Democrito.

Le idee platoniche, che sono insieme « tipi » o « specie » vengono concepite dal filosofo come qualcosa che *esiste* di per sè, di là dalle sensazioni, in un mondo intellegibile. E proprio le matematiche hanno offerto il modello di questo genere di enti: (Rep. 510 c, d, e) « .... Quelli che si occupano di geometria e di aritmetica, ecc. assumono il pari e il dispari, e le figure e tre specie di angoli, e altri simili supposti nelle dimostrazioni; e come avendone certa scienza questi supposti li prendono per base, e quasi fossero evidenti non pensano affatto a darne alcuna ragione, nè a sè stessi, nè agli altri; anzi, di qui partendo, ordinatamente dimostrano tutto il resto giungendo infine a ciò che si proponevano di dimostrare.... Essi si valgono, perciò, di figure visibili, e ragionano su di esse, non ad esse pensando, ma a quelle di cui queste sono l'immagine, ragionando sul quadrato in sè stesso e sulla sua diagonale, anzichè su quello o quella che disegnano (quasi ombre o immagini specchiate dall'acqua), tutte le adoperano come rappresentazioni, cercando di vedere attraverso di esse i loro originali, che non sono visibili se non dall'intelligenza idealizzatrice (διάνοια) ».

Gli Elleni, diceva ancora Platone, sono molto ignoranti; la maggior parte di loro non sa che esistono grandezze incommensurabili. E voleva dire che la mente può arrivare al possesso di verità che, come questa, oltrepassano ogni esperienza possibile.

Per cercare un fondamento alla morale, che non riposi sulle sabbie mobili del mondo della sensazione, il nostro filosofo introduce la veduta delle *conoscenze innate,* che egli rappresenta miticamente con la celebre dottrina della *reminiscenza;* e per illustrare il suo concetto ricorre nel « Menone » alle conoscenze geometriche, facendo ritrovare da uno schiavo, abilmente interrogato, il teorema di Pitagora per il triangolo rettangolo isoscele, come cosa che quegli debba aver già conosciuto in una vita anteriore.

Aristotele esprime in gran parte una reazione allo spirito della scienza matematica; pure la sua logica riprende sostanzialmente dai matematici le leggi del ragionamento: in particolare gli *Analytica posteriora* ci offrono il disegno della scienza dimostrativa, che si sviluppa a partire da definizioni, assiomi e postulati, sul modello della geometria.

24. - I GRANDI SISTEMI METAFISICI MODERNI

I motivi matematici della filosofia neo-platonica ritornano al primo piano nel momento creativo dell'evoluzione del pensiero che si esprime dal Rinascimento. Quando la diffusione della letteratura classica e la più estesa conoscenza di idee e di credenze diverse, e la stessa rottura dell'unità cristiana con le lotte religiose che l'accompagnano, sembrano volgere le menti verso la scepsi, lo spirito umano attinge alla veduta della verità matematica il coraggio di affrontare con nuovo vigore i problemi del mondo e di Dio. Il razionalismo metafisico, che così prende origine, porta con sè qualcosa dell'antico senso mistico dei Pitagorici. GALILEO, parlando delle proprietà del cerchio, che la mente umana deduce progressivamente dalla sua definizione, dice che « l'intelletto divino, con la semplice apprensione della sua essenza, comprende, senza temporaneo discorso, tutta la infinità di quelle passioni, le quali anco poi in effetto virtualmente si comprendono nelle definizioni di tutte le cose, e che poi finalmente, per essere infinite, forse sono una sola nell'essenza loro e nella mente divina ». Il che nè anco all'intelletto umano è del tutto incognito..... Infatti quei passaggi « che l'intelletto nostro fa con tempo e con moto di passo in passo, l'intelletto divino, a guisa di luce trascorre in un instante, che è lo stesso che dire, gli ha sempre presenti » [1]. Qui è lecito forse ravvisare una reminiscenza di S. AGOSTINO, poichè il dottore della grazia, polemizzando contro Origene che aveva sostenuto la finitezza del mondo, ritenendo impossibile a Dio stesso concepire un'infinità di creature, dichiarava priva di luce

---

[1] *Opere*, VII, 129.

l'idea che Dio non possa pensare nel suo insieme la totalità dei mondi: Dio la vede in atto nel suo spirito, senza percorrere passo a passo la serie, come l'intelletto umano. « Mentem divinam omnino immutabilem cuius libet infinitatis capacem et numera omnia sine cogitationis alternatione numerantem » (1).

Comunque sia, dal razionalismo galileiano riceve impulso non soltanto la ricerca fisico-matematica, sì anche la speculazione metafisica dei filosofi come DESCARTES, LEIBNIZ, SPINOZA (2). Per questi il criterio della verità viene riposto nelle idee chiare e distinte, e si concepisce come possibile di svolgere deduttivamente la scienza universale dell'Essere nelle forme delle matematiche. Del resto Descartes e Leibniz appartengono egualmente alla storia delle matematiche come a quella della filosofia, e Spinoza esprime il suo ideale di conoscenza già nel titolo della sua « Ethica, ordine geometrico demonstrata ».

25. - IL RAZIONALISMO

Nelle pagine che precedono, i rapporti delle matematiche colla filosofia appariscono già dalla storia di questa, secondo un punto di vista esterno. Ma per comprendere più profondamente l'intimo legame che qui si rivela, conviene esaminare il significato del razionalismo e i motivi che influiscono sopra la sua evoluzione.

Il razionalismo, che involge nei suoi principii tanto una teoria della conoscenza che una metafisica, prende origine dalla consapevolezza che la ragione o il pensiero dà un criterio della verità, diverso, e talvolta contraddittorio, al criterio del senso; e quindi che gli oggetti del pensiero, i cosidetti « intelligibili », si distinguono dalle cose sensibili. Gli stessi principii logici — per esempio il principio di contraddizione, ovvero l'assioma che « cose eguali ad una terza sono

---

(1) *De Civitate Dei*, XII, 17 e 18.

(2) Cfr. F. ENRIQUES, *Descartes et Galilée*, in « Revue de Métaphysique », 1937.

eguali fra loro » — valgono per gli intelligibili, ma non immancabilmente pei sensibili, in quanto la definizione di questi è incerta ed approssimativa: cose sensibilmente eguali si confondono con cose poco differenti, e le piccole differenze possono sommarsi in guisa che, passando da eguale ad eguale successivamente, si pervenga a cose diseguali.

Ora, donde viene questa distinzione dell'intelligibile, la considerazione di enti razionali che non appartengono alla realtà sensibile, la esatta discriminazione dell'eguaglianza dalla piccola differenza?

Proprio questi insegnamenti scaturiscono dalle matematiche e dalla critica dei principii di esse nelle scuole degli antichi Pitagorici e degli Eleati. Nel razionalismo pur primitivo degli Eleati s'incontra anche, espresso per la prima volta, il motivo fondamentale che apparirà in aspetti più significanti negli sviluppi posteriori: « fuori dell'Essere in cui si esprime, dov'altro troverai il pensiero? »; cioè: il pensiero è criterio dell'esistenza; non esiste ciò che non può essere pensato senza contraddizione, e all'oppostò ciò che è pensato o pensabile deve, in qualche modo, esistere.

Per Parmenide d'Elea questo modo d'esistenza risponde ad un concetto della « verità » affatto indipendente dal reale sensibile. Il razionalismo rinnovato da Democrito e Platone, traverso la polemica empiristica dei Sofisti, pone l'esigenza che la verità debba accordarsi coi fenomeni, cioè « salvare le apparenze ». Quindi il principio razionalistico riceve un significato più espressivo: nell'infinità dell'Universo si avverano, per Democrito, tutte le possibilità, ogni oggetto ed ogni evento che il pensiero possa rappresentarsi senza contraddizione. Lucrezio scorge qui la « vis infinitatis ».

Ma che altro esprime tale principio se non la fede del matematico che le sue costruzioni non sieno giuochi arbitrarii della fantasia, ma abbiano riscontro in qualche realtà più o meno vicina?

Questa fede, per cui le matematiche assumono un senso poetico, allarga ad ogni istante il dominio esplorato dal fisico anticipando la conoscenza di fenomeni non ancora sperimentati; per essa l'astronomo è condotto a supporre pia-

neti che potranno più tardi osservarsi in posizioni predeterminate dal calcolo, il chimico elementi che debbono occupare un posto vuoto nella scala di Mendeleieff; e Maxwell, come già si è detto, vede coll'occhio della ragione le onde luminose dilatarsi nelle onde elettromagnetiche, che Hertz realizzerà coi suoi celebri esperimenti, e che diventeranno — con Marconi — invisibili messaggeri del nostro pensiero su tutta la Terra.

Rileviamo d'altra parte il significato morale religioso che la concezione razionalistica assume in Platone. Per lui gli oggetti del pensiero — le idee generali foggiate dalla nostra mente — esistono in modo più vero e maggiore, in confronto alle cose sensibili, che ad esse si avvicinano e si subordinano, quali ombre della verità. E come la figura geometrica sta al corpo fisico che la realizza, così la norma ideale sta all'atto. Qui non c'è soltanto un confronto che dà rilievo alla veduta del rigore esatto rispetto all'approssimazione, o del limite rispetto al variabile. Come lo schema geometrico si solleva sulle figure fisiche di cui esprime la legge comune di generazione, anche il precetto morale supera il contingente delle azioni individuali per mirare all'universale. Infine, se la varietà e la mobilità del sensibile apparisce come elemento perturbatore al filosofo che appunta lo sguardo sopra le Idee, il mondo delle pure forme geometriche intelligibili si erge davanti a lui a rispecchiare il regno degli ideali sopra la vita: anche qui l'uomo saggio che prende norma dalla ragione, è tratto a considerare gli appetiti e le passioni che vengono dal senso siccome perturbatori della condotta, mentre il Bene — suprema aspirazione dell'animo religioso — si libera da tutti gli impulsi buoni, quasi forma pura ed incorruttibile dell'Eterno di fronte a tutte le cose che passano.

26. - Il realismo dialettico

Il metafisico che cerca nel sistema delle Idee il valore di conoscenza vi scorgerà un altro aspetto significativo. Non basta riconoscere un mondo intelligibile che adombra la real-

tà sensibile, ma conviene anche vedere éspressi nei rapporti di dipendenza delle idee i rapporti causali di questa realtà. In ciò consiste appunto il realismo dialettico.

Il suo motivo ispiratore appartiene già alla ideologia platonica, sebbene in rapporto ad una visione statica e classificatoria della scienza. Anche Aristotele accenna ad esso quando dice che i principii della scienza dimostrativa sono da ritenere come cause delle verità che ne dipendono. Però il pieno realismo dialettico si incontra nei sistemi metafisici moderni, che traggono ispirazione da una matematica, non più statica e geometrica, bensì dinamica, in ragione dello sviluppo della Meccanica.

Per intendere la cosa rappresentiamoci una serie di costruzioni a partire da una figura data; c'è qui una successione di concetti che derivano l'uno dall'altro, e i rapporti logici della loro dipendenza appariscono anche come rapporti genetici delle figure corrispondenti. Ovvero, per prendere un esempio espressivo dalla fisico-matematica, adottiamo l'ipotesi cinetica per cui il calore è moto disordinato delle piccole particelle del corpo: se, in tale ipotesi, vogliamo spiegare come avvenga che il moto bruscamente arrestato di un proiettile, si trasformi in calore, basta pensare ad un sistema di moti ordinati delle particelle di quello che si prolunga in una serie di moti disordinati. La conoscenza dell'effetto dipende dalla conoscenza della causa e involge la medesima secondo il modello del rapporto di subordinazione che lega, nelle matematiche, concetti a concetti e teoremi a teoremi, nella definizione e nella dimostrazione.

Di qui dunque trae ispirazione il realismo dialettico dei grandi sistemi metafisici, e ne offre un esempio caratteristico l'*Ethica ordine geometrico demonstrata* di B. Spinoza, dove il motivo di cui si discorre viene esplicitamente enunciato: « *ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum* » (1).

---

(1) Ethices Pars II, Prop. VII; cfr. ibidem, P. I, ax. IV.

27. - Esistenza per definizione e argomento ontologico

Abbiam detto che il realismo dialettico assimila i rapporti di causa ed effetto ai rapporti di dipendenza delle idee, come appariscono nel sistema delle matematiche. Ma non basta ai metafisici di prendere a modello l'ordine deduttivo di questa scienza; essi aspirano anche a renderlo più puro e perfetto, inseguendo un miraggio di perfezione logica, che a dir vero contrasta col senso della logica, debitamente inteso. Questa pretesa di superare la razionalità matematica o di elevare le stesse matematiche ad un grado più alto ed assoluto di perfezione logica, si affaccia già da Platone. « La geometria e le scienze connesse — dice la Repubblica 533 c — sognano rispetto all'esistente, ma è impossibile che lo vedano ad occhi aperti, finchè si valgono di postulati e li tengon fermi, senza potersene render conto ». In altre parole il vero ordine razionale della geometria sarebbe quello in cui tutto viene dedotto da semplici definizioni o da assiomi puramente logici (proposizioni analitiche o identiche). È un ideale della perfezione logica che si ritrova più volte nella storia del pensiero matematico, fino a Leibniz.

Esso sembra quasi imporsi alla mente di un razionalista conseguente, che rifiuti di ammettere alcunchè sulla base dell'esperienza o di un'intuizione apparentata coll'esperienza. E ad avvalorarlo come modello della metafisica interviene anche il significato dei postulati, quale appare nelle matematiche antiche: perchè i postulati enunciano, in sostanza, *l'esistenza* di quelle figure geometriche di cui assegnano la *costruzione*. Anche qui Platone stesso avvertiva che questo modo d'introdurre gli enti della geometria conferisce alla scienza un aspetto pratico, che non si confà al suo vero significato. Non sarebbe più giusto ritenere che l'esistenza degli enti stessi consegua senz'altro dal fatto che sono pensati? e non si potrebbe dunque affermare che essi esistono per definizione?

Evidentemente i matematici greci del IV secolo a. C. hanno incontrato tale domanda e hanno dovuto convincersi che

c'è qui una illusione: chè, assumendo come esistente o possibile una figura soggetta a certe condizioni si rischia di cadere nell'assurdo; almeno nel caso che le condizioni poste sieno implicitamente contraddittorie. Aristotele ci porta l'eco di tali riflessioni: « Di nessuna cosa può affermarsi che esiste per definizione » (*Analytica posteriora,* VII).

Ma nell'evoluzione ulteriore delle matematiche greche, dopo il periodo classico, il valore di quest'esigenza logica non è sempre bene compreso. Ne fa fede il tentativo (che si presenta in Gemino e in Posidonio) di dimostrare il V postulato d'Euclide, che sta a base della teoria delle parallele, facendolo dipendere dalla semplice definizione delle parallele stesse come rette del piano equidistanti: dove nell'assumere l'esistenza di rette così definite, si commette appunto l'errore che G. Saccheri, nel secolo XVII, doveva denunziare come « fallacia della definizione complessa ».

Queste spiegazioni mirano a dar ragione di un punto fondamentale in cui l'ordine dei sistemi metafisici ispirati al realismo dialettico pare accostarsi, non tanto ai migliori modelli offerti dalle costruzioni matematiche, quanto al miraggio dell'ordine superrazionale, che fa a meno di postulati, accogliendo un falso concetto del rigore logico. D'altronde l'esigenza che si fa valere in questo punto, risponde piuttosto che ad un criterio logico astratto, all'aspirazione dell'animo di certificare nel modo più assoluto la verità dell'ordine morale e religioso, ed assicurare così i principii da cui si fanno dipendere.

Se l'ordine delle cause vuolsi rispecchiato nell'ordine di deduzione o di definizione delle idee, la Causa causarum — Causa Prima o Dio — dovrà rispondere ad un concetto che regga l'intero sistema, e da cui si formino tutti gli altri. Questo concetto Anselmo d'Aosta lo ha ravvisato nel massimo di perfezione (*Id quod maius cogitari nequit*), che assomma in sè tutti i possibili, e l'esistenza del Perfettissimo è sembrata a lui esprimere l'esigenza stessa del razionalismo, cioè la corrispondenza della realtà al pensiero. Tale è il senso profondo dell'argomento ontologico, che Anselmo spiega a dir vero in una maniera sofistica: se il Perfettissimo non

esistesse nella realtà si potrebbe pensare un più perfetto che alle qualità del primo aggiungesse anche quella di esistere. Si comprende quindi la fortuna che lo stesso argomento ha avuto nell'evoluzione della metafisica posteriore; da DESCARTES a SPINOZA e a LEIBNIZ, più tardi ad HEGEL.

Spinoza presenta lo stesso argomento sotto la forma di definizione (la prima dell'Ethica): *Per Causam sui intelligo id cuius essentia involvit existentiam; sive id, cuius natura non potest concipi nisi existens.* Si ritrova qui esattamente l'errore logico di quei geometri che come abbiam detto tentarono di nascondere il postulato d'Euclide sotto una nuova definizione delle parallele!

28. - L'INFINITO

Tocchiamo ora il punto critico del razionalismo metafisico: il concetto dell'Essere necessario, designato come Assoluto, Incondizionato, Infinito, in cui il pensiero riflette l'evoluzione dell'infinito matematico.

L'idea di qualcosa che esista di per sè, di fronte a ciò che ci appare come relativo a qualcos'altro — ciò che noi oggi designamo come « assoluto » — si può ritrovare fin dalle origini della speculazione relativistica in Anassimandro. Ad essa risponde la ricerca della natura delle cose, che vuolsi sceverare da ciò che è apparenza o *convenzione*. In Socrate, Platone, Aristotele, questa ricerca assume un proprio significato in opposizione alla critica illuministica dei sofisti, che appariva demolire le idee, le credenze e gl'istituti tradizionali, trasferendo nel campo morale e sociale la distinzione sorta nel dominio della fisica. Salvo qualche accenno che rileveremo più avanti, il mondo delle Idee o il sistema dei concetti di Platone è ancora pensato, a somiglianza del mondo fisico, come compiuto e finito. Non c'è ancora la consapevolezza di serie di relazioni prolungantisi indefinitamente, di fronte a cui l'assoluto dovrà concepirsi come totalità o come ultimo termine, implicando così l'idea di un infinito in atto. Anzi nella stretta limitazione del concetto, vuolsi riconoscere da taluno un tratto caratteristico del genio ellenico,

quale si manifesta nell'arte e nella filosofia dell'età classica. Ciò che esiste, aveva detto Parmenide, deve avere un limite: « se gli mancasse il limite tutto gli mancherebbe ». E Platone, nel *Timeo*, accennando all'ipotesi di Democrito che esistano infiniti mondi, dice che questa opinione « sembra appartenere a qualcuno che non ha finito d'imparare ».

Tuttavia in un punto si affaccia a Platone l'esigenza dell'infinito. Per intenderla riportiamoci alla discussione sull'unità, sollevata da Parmenide. L'esistente — la « materia estesa » spogliata di ogni altra qualità sensibile, che riempie lo spazio senza vuoti, identificandosi con esso — non è mai separato dall'esistente, con cui confina; ma il concetto di una figura o di un corpo limitato include l'idea del limite e perciò del corpo o dello spazio esterno limitante: dunque non si può pensare una cosa esistente di per sè, senza relazione col Tutto di cui fa parte: le cose essendo attaccate, si prolungano l'una nell'altra senza distinzione possibile.

Questa deduzione risponde al criterio di senso comune con cui distinguiamo, nei giudizi familiari, l'uno e il più. Anche qui si scopre che la distinzione non ha un carattere assoluto e contiene anzi qualcosa d'arbitrario: ad arbitrio possiamo parlare di più alberi o di una foresta, di più case o di un isolato o di una città, ecc. Ma il criterio più ovvio, e direi quasi primitivo, che serve di base a tali giudizi si riduce a questo: c'è o non c'è *contiguità* nello spazio?

Nello sviluppo ulteriore della filosofia, il senso primitivo del problema unità-pluralità viene superato: non si tratta più della struttura monadica della materia e del punto-esteso dei pitagorici, cui si oppone la tesi eleatica della continuità dell'esistente, ma delle relazioni fra le idee e le cose o fra le idee le une rispetto alle altre. Platone si affatica intorno alla domanda come possa sussistere l'unità dell'Idea pur disciolta nella pluralità degli oggetti di cui porge il modello. E ancora vien tratto a ricercare se qualcosa possa concepirsi sotto la specie dell'unità, senza riferimento qualsiasi alla nozione del « più ». La discussione costituisce il tema del brillante esercizio dialettico offerto da uno dei più disputati dialoghi platonici, il « Parmenide »: una serie di

deduzioni sofistiche che mette capo a conclusioni contraddittorie. Pure in questo imbroglio di discorsi non manca qualche motivo interessante, a cui più tardi attingeranno ispirazione i neo-platonici. Motivo centrale sembra essere l'analogia fra il concetto dell'assoluto filosofico e l'infinito estensivo o quantitativo delle matematiche. Si fa qualche passo verso una comprensione relativa del dialogo, ravvisando in esso la traduzione filosofica delle antinomie zenoniane cui dà luogo l'infinito matematico.

Già i predecessori di Platone avevano pensato la « relazione » sul modello delle matematiche: Protagora, di cui sono esposte le dottrine nel « Teeteto », esprime appunto la relatività di tutte le cose al soggetto, dicendo che « l'uomo è la misura di tutte le cose, di quelle che sono, che sono, e di quelle che non sono, che non sono ». Ed ora il personaggio del « Parmenide », esaminando il concetto dell'Uno-tutto, parla delle sue parti e delle sue misure (140 *b*) e dimostra che ha da essere, ad un tempo, finito e infinito (145 *a*): finito se deve potersi concepire come un oggetto del pensiero, ed infinito se effettivamente deve coinvolgere tutte le parti e tutte le relazioni possibili.

Di qui appunto i neo-platonici potranno derivare il loro concetto dell'assoluto come Infinito. Frattanto c'è in questa veduta una profonda trasformazione di motivi estetico-morali, quale viene rilevata da Jonas Cohn [1]. Lo spirito della tarda età ellenistica allontanandosi dall'atteggiamento classico, si mostra nelle nuove espressioni dell'arte col senso romantico dell'indefinito. Gli occhi che avevano mirato a ciò che è chiaro e distinto — al concetto dell'ordine e alla misura — si levano ora, fascinati dal mistero, verso l'inconoscibile. Ed invero si scopre in questa evoluzione un'influenza estranea all'ellenismo, specialmente dello spirito religioso ebraico.

L'infinità d'Iddio è teorizzata dalla filosofia neo-platonica che ha il suo massimo rappresentante in Plotino. Ma la nozione dell'Infinito o assoluto filosofico, assume ormai

---

(1) *Geschichte der Unendlichkeit*. Lipsia, 1896.

il senso più largo in cui resta soltanto un'analogia col concetto matematico: l'infinito matematico è concepito come una quantità che eccede i limiti delle quantità finite; l'assoluto o incondizionato si presenta al pensiero come qualcosa che sta al di fuori della serie delle relazioni e non può essere definito per mezzo di queste. In siffatto senso analogico si incontrerà anche un *Infinito di qualità*, che non ha nulla a che fare col concetto preciso dell'infinito matematico.

Questo modo d'intendere l'*Infinito filosofico* svolto — come si è detto — nella speculazione neo-platonica, si ritrova con accento più alto nella dottrina dell'infinità d'Iddio, dei Padri della Chiesa, e massime in S. Agostino. L'Infinito viene da lui concepito in modo affatto spirituale. Dio è infinità assoluta in tutte le sue parti; perciò non può esser corpo, chè altrimenti, pur essendo infinito, avrebbe delle parti finite [1]. Per contro le parti di Dio — se così voglionsi chiamare le sue qualità: la potenza, la scienza, la bontà, ecc. — sono tutte ugualmente infinite.

Otto secoli più tardi, S. Tommaso d'Aquino dopo S. Anselmo d'Aosta riprendendo il concetto di Dio come Essere perfettissimo, insisterà sul significato qualitativo di questa nozione, in confronto del *cattivo infinito*, che è l'infinito matematico, costruito con una serie illimitata di parti, che si aggiungono le une alle altre.

Infine questo « cattivo infinito », col più grande disdegno per il pensiero matematico, verrà respinto dall'idealismo romantico che — in contrasto alla scienza — svolgerà i motivi della filosofia kantiana, nel secolo decimonono; in ispecie da Hegel. Tuttavia è lecito avvertire che il pensiero stesso di Hegel subisce una nascosta influenza delle idee critiche che si andavano maturando nel mondo contemporaneo intorno all'infinito matematico. Perchè l'*assoluto* di Hegel, cioè l'infinito filosofico, che egli scorge nell'*Universale concreto*, risponde non più all'idea dell'infinito attuale (trasposta — come si è visto — nella teologia classica), bensì all'*infinito potenziale*: infatti il suo assoluto consiste nella possi-

---

[1] *Confessioni*, III, 7.

bilità di estendere illimitatamente la serie delle relazioni, e perciò non nella scienza fatta, ma nel divenire della scienza che cresce sopra di sè per tesi ed antitesi, superando sè stessa.

E ci è dato anche di cogliere una reazione caratteristica della filosofia sulle matematiche. Sembra invero che dalla reazione ad Hegel nel senso della teologia classica, ricevano impulso le speculazioni del prete riformatore cattolico B. Bolzano, sopra l'infinito matematico in atto: donde muove la costruzione della generale *teoria degl'insiemi* di G. Cantor.

29. - Le Matematiche e la critica di Kant

Ritorniamo ai grandi sistemi metafisici del secolo decimosettimo, per dire della critica a cui han dato luogo. Il razionalismo che in essi si esprime solleva la critica empiristica dei filosofi inglesi, da Locke a Berkeley e a Hume. E questa stessa critica non s'intende da chi non abbia chiaro il senso scientifico delle tesi combattute. Così l'analisi di Berkeley, che riduce la definizione dell'esistenza al percepibile (*esse est percipi*), trae il suo proprio significato storico dalla tesi dei filosofi matematici, ripresa da Locke, che nelle proprietà geometriche (*proprietà primarie*), ritenevano di cogliere la verità delle cose in se stesse, tentando invece di ridurre, come già si vide, a ragioni di figura e di movimento tutte le altre proprietà, o qualità *secondarie* (suoni, colori, odori, sapori, ecc.).

Anche la celebre analisi del concetto di causa, di David Hume, risponde storicamente al realismo dialettico, cioè alla concezione logico-matematica della causa nei sistemi panlogistici, cui sopra abbiamo accennato.

Ma una nuova influenza del pensiero matematico si scorge nella teoria della conoscenza di Emanuele Kant. Il quale prende le mosse appunto dalla critica di Hume e gli rimprovera che, secondo le sue conclusioni, tutto ciò che chiamiamo metafisica si fonderebbe sulla semplice illusione di una presunta verità razionale; illusione che essa in realtà attinge

dall'esperienza, e che ha ricevuto l'apparenza della necessità per via dell'abitudine. « Alla quale osservazione, che distrugge ogni filosofia, pure egli non si sarebbe mai lasciato andare, se avesse avuto sotto gli occhi il problema (della conoscenza) nella sua universalità; nel qual caso avrebbe visto che secondo i suoi argomenti, non esisterebbe più neppure la matematica pura, perchè questa comprende per certo giudizi sintetici *a priori*; e il suo buon senso lo avrebbe perciò allontanato dal concludere in tal modo » [1].

La prima parte della gnoseologia di Kant, la cosidetta *estetica trascendentale*, è una dottrina filosofica dello spazio e del tempo, cui l'autore nega ogni realtà obiettiva, scorgendovi condizioni *a priori* della sensibilità del soggetto. La *logica trascendentale* si svolge a partire dalle *antinomie* inerenti al concetto dell'infinito; così per esempio nella prima antinomia:

Tesi: Il mondo ha un principio e lo spazio è limitato.

Antitesi: Il mondo è senza principio e senza limiti, cioè infinito nello spazio e nel tempo.

30. - La filosofia positiva e il pragmatismo

Alla metafisica razionalistica si oppone, d'altra parte, un movimento di pensiero che s'inizia poco prima della metà del secolo scorso col positivismo di Augusto Comte. È ben noto che questi era di professione matematico, ripetitore alla Scuola Politecnica di Parigi, e che ha tratto dalle matematiche diversi motivi ispiratori del suo sistema: anzitutto la predilezione per le idee nettamente definite e l'orrore per le questioni prive di senso. Talune esigenze del sapere, poste dalla sua critica, derivano (come già accennammo) da Newton, e tornano ad agire più tardi nella filosofia della scienza contemporanea, con E. Mach e W Ostwald.

Ora, quando l'influenza più larga del positivismo veniva esaurendosi nella cerchia dei suoi discepoli, un nuovo indi

---

(1) *Critica della ragion pura*, trad. it. Bari, Laterza, 1910, introd. pag. 954.

rizzo di pensiero, il *pragmatismo*, che è servito come ponte di passaggio alla reazione idealistica contemporanea, si vede pure nascere dalla mente di un matematico e ritrarre qualcosa di significativo proprio dello spirito matematico.

SANTIAGO PEIRCE, in una formula che è divenuta famosa, ha detto che « il senso di una dottrina o di un'idea consiste nelle conseguenze pratiche che se ne deducono ». E questo è appunto il significato che assume per i matematici la dimostrazione di un teorema: la quale, non tanto è richiesta per assicurarsi che il teorema è vero, quanto per intendere il significato della verità che si condensa nell'enunciato.

31. - NUOVI SVILUPPI DELLA TEORIA DELLA CONOSCENZA

Lo spirito della filosofia positiva e quello della critica kantiana si compongono oggi in alcuni nuovi indirizzi della teoria della conoscenza; ma il vero impulso a cotali indirizzi viene dall'analisi del pensiero scientifico proseguita da uomini di scienza, che sono in gran parte matematici [1].

Accenniamo rapidamente ad alcuni motivi che esercitano la loro influenza in quest'ordine di idee.

Tutti sanno che la revisione critica della dottrina kantiana dello spazio e del tempo (come forme *a priori* della sensibilità) si accompagna alla creazione della *geometria non-euclidea*, per opera di GAUSS, LOBATSCHEWSKIJ e BOLYAI.

Kant deduceva la realtà degli assiomi geometrici dal fatto che essi esprimerebbero condizioni necessarie di ogni esperienza possibile; ma questa deduzione riesce infirmata dalla costruzione di sistemi geometrici per cui non vale più il postulato d'Euclide delle parallele, specialmente perchè tali sistemi dipendono da un parametro arbitrario che, particolarizzandosi, dà luogo al caso euclideo come caso limite: ne deriva che la stessa esperienza si può interpretare subordinatamente alle ipotesi più generali poste a base della geo-

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *La Théorie de la connaissance scientifique de Kant jusqu'à nos jours*. Parigi, Hermann, 1938.

metria, almeno in un ordine d'approssimazione sufficientemente grande, che in concreto non si distingue dall'esattezza.

Nello sviluppo ulteriore della scienza, il problema fisico o filosofico della geometria è venuto a collegarsi alla questione della dinamica, e la *teoria della relatività* di EINSTEIN reca il frutto scientifico della critica filosofica proseguita dai pensatori matematici, per cui spazio e tempo, cessando di apparire intuizioni *a priori*, vedonsi esprimere schemi generali che la mente costruisce per subordinarvi un vasto insieme di rapporti della realtà.

Con questa rivoluzione scientifica (che si estende ed approfondisce coll'ipotesi quantistica) matura anche la consapevolezza del nuovo senso che assumono talune categorie logiche dell'intelletto, traverso l'analisi dei pensatori matematici. Le nozioni della sostanza e della causa, che Kant ha teorizzato nella sua critica, debbono essere rivedute: per esempio il concetto della causa cede a quello della interdipendenza dei fenomeni. D'altra parte la nuova critica riesce ad abbattere l'idea di un ordine necessario dei principii della scienza, quale si era ritenuto sempre da Aristotele a Kant.

Anche in altri punti la logica scientifica kantiana appare profondamente modificata [1]. Per esempio, là dove si tocca alla distinzione fra giudizii sintetici ed analitici. Infatti la critica dei concetti della fisica, istituita secondo lo spirito positivistico da Mach e da Maxwell, ha messo in rilievo il contenuto sintetico degli assiomi dell'eguaglianza, mentre gli sviluppi della teoria degli insiemi hanno gettato una luce simile sugli assiomi della diseguaglianza.

Infine, senza indugiarsi sopra un argomento che esigerebbe da solo la più vasta discussione, tutta la speculazione dei matematici contemporanei converge in una nuova veduta del razionalismo, che supera Kant:

la ragion pura di Kant viene ad apparire un ideale astratto di fronte alla ragione che si svolge progressivamente, col concorso dell'esperienza, nella storia del pensiero scientifico.

---

(1) Cfr. ENRIQUES, *Per la storia della logica*. Bologna, 1922.

Questa conclusione è tanto più espressiva in quanto riesce a conciliare in un concetto superiore l'antitesi profonda di motivi filosofici, che si esprime col contrasto del positivismo e dell'idealismo romantico, della scienza e dell'antiscienza.

32. - Conclusione

Da tutto ciò che abbiamo esposto resulta il contributo che l'educazione matematica può recare alla filosofia; tantochè risuona attuale all'orecchio l'ammonimento che vuolsi fosse scritto sulla porta della scuola di Platone:

μηδεὶς ἀγεωμέτρικος εἰσίτο

(Nessuno entri che non sappia di geometria).

C'è qualcosa di comico nell'atteggiamento dei filosofi idealisti che, con poche frasi fatte, credono sbrigarsi dall'obbligo un po' incomodo di meditare ciò che non riesce loro di comprendere. Essi ci fanno risovvenire di coloro di cui, nella sua splendida prosa, parla Galileo [1]:

« Qua io m'aspetto un rabbuffo terribile da qualcuno degli avversarii; e già parmi di sentire intonar negli orecchi che altro è il trattar le cose fisicamente ed altro matematicamente, e che i geometri doveriano restar tra le loro girandole, e non affratellarsi con le materie filosofiche, le cui verità sono diverse dalle verità matematiche; quasi che il vero possa esser più di uno: quasi che la geometria ai nostri tempi pregiudichi all'acquisto della vera filosofia, e quasi che sia impossibile esser geometra e filosofo.... Conseguenze non meno sciocche di quella di un tal medico fisico, che, spinto da un poco di livore, diceva che il medico Acquapendente essendo grande anatomista e chirurgo, doveva contentarsi di star fra i suoi ferri ed unguenti, senza volersi ingerire nelle cure fisiche, come se la cognizione della chirurgia distruggesse e fosse contraria alla fisica ». Ai quali avversarii infine Galileo rivolge l'invito che « di grazia cessino di esser così

---

[1] *Opere*, IV, pag. 49.

aspri nimici della geometria », ciò che — dice — ho scorto io « non senza mia grandissima meraviglia, il quale credevo che non si potesse esser tanto nimico di persona non conosciuta ».

Ciò che Galileo dice della filosofia della natura vale egualmente della filosofia dello spirito, solo che l'idealista guardi, non tanto ai resultati della scienza matematica, quanto allo sforzo del pensiero che la costruisce nella storia.

Insistiamo che si tratta di trar vantaggio da un'educazione, da un possesso o da un acquisto della mentalità matematica, non da una cultura tecnica. Perchè gli idealisti non sono i soli a peccare contro lo Spirito. Nel campo opposto trovansi filosofi che per avere coltivato le matematiche piuttosto estensivamente che in profondità, s'immaginano di mettere a profitto la tecnica di cui hanno appreso il maneggio. Nulla allontana di più il vero matematico che questa specie di contraffazione del suo pensiero: quando, per esempio, un HERBART pretende di costruire la psicologia razionale sulla base del Calcolo differenziale, ovvero uno STUMPF ricorre malamente a riposte proprietà geometriche, per dedurne, con circoli viziosi, l'innatismo della intuizione spaziale.

Bisogna dire esplicitamente che l'applicazione della tecnica matematica, e in ispecie l'uso del simbolismo analitico nelle questioni filosofiche, sono *a priori* sospetti. Al filosofo si domanda molto meno e molto di più che l'apprendimento di questa tecnica: la chiara intelligenza delle idee più elementari ch'egli non avrà mai sufficientemente approfondite, e il significato filosofico — che spesso egli crede d'insegnare ed invece deve apprendere da chi ha più lungamente meditato su tale soggetto — dei principii e dei metodi della scienza.

Gli si domanda ancora altra cosa quando ei si volge a studiare la storia della filosofia: che non rompa il nesso delle correnti spirituali che convergono nel movimento del pensiero, e perciò che intenda i motivi diversi onde il movimento stesso si origina. La trascuranza a questo proposito giunge al punto che taluno non si perita di accogliere traduzioni di

testi filosofici greci, che sono prive di senso perchè il traduttore non ha inteso il riferimento di essi a qualche concetto matematico: di ciò ho dato alcuni esempi nel mio scritto su « Il significato della storia del pensiero scientifico » [1].

L'idealismo romantico, che abbiamo visto risorgere nella nostra generazione, in contrasto col particolarismo positivistico, ha conquistato molti spiriti colla promessa generosa di ascoltare tutte le voci umane, e di trarre dall'urto di esse l'armonia discorde dello Spirito, che si fa nella storia. Che dire ora se, con diversi pretesti o pregiudiziali, questo universalismo umanistico degeneri in una filosofia dei compartimenti-stagno? Se dello Spirito che soffia dove vuole si rifiuti di ascoltare la parola, quando suoni piuttosto da una parte che dall'altra del monte?

---

[1] Bologna, 1936.

Capitolo IV.

CHE COSA SONO LE MATEMATICHE

33. - Significato degli enti matematici

La matematica pone al filosofo il problema di chiarire il significato dei suoi enti. Abbiamo già visto che Platone scorgeva in questi gli oggetti di una realtà intelligibile. Invece gli stessi enti, astratti e separati dal mondo delle sensazioni, appariscono ad Aristotele come irreali. Di qui la controversia tra realisti e nominalisti, che doveva riaccendersi e prolungarsi nel medioevo. La difficoltà del problema sta in ciò: che fantasmi privi di corpo sembrano dominare le cose che in qualche modo ne dipendono: se pure non hanno esistenza concreta, si ritrovano come immanenti negli oggetti e nelle leggi della fisica. Una serie di minerali cristallizzati nella forma cubica pone allo spirito dell'osservatore « il cubo » come qualcosa di dato: un modello che se pure sia foggiato dallo spirito stesso per un lavoro inconscio d'astrazione e d'idealizzazione, appare in qualche modo immanente nelle cose osservate.

« La filosofia — dice Galileo [1] — è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola... ».

---

[1] *Opere*, VI, 232.

34. - Definizioni delle matematiche

Per rispondere al problema sopra indicato, sembra naturale chiedersi in che maniera i pensatori più cospicui abbiano definito le matematiche. Ma, come vedremo, queste definizioni non ci fanno penetrare meglio le difficoltà.

Per Descartes « toutes les sciences, qui ont pour but la recherche de l'ordre et de la mesure se rapportent aux mathématiques » (1). Leibniz dice: « Mathesis universalis est scientia de quantitate in universum, seu de ratione *aestimandi*.... hinc fit ut mathesis universalis sit scientia de mensurae repetitione seu de numero » (2).

Lo scopo di tali definizioni sembra essere soltanto di affermare l'unità del sapere matematico che, con la geometria analitica, viene a dipendere dal concetto del numero.

In modo simile, B. Bolzano, preoccupandosi di una possibile estensione di questo sapere, di là dell'ordinaria aritmetica, nel campo dell'infinito (cui si riferiscono i suoi *Paradoxien des Unendlichen*. Lipsia, 1857) definisce le matematiche come « scienza delle grandezze », dando il nome di grandezze a una qualsiasi classe di enti per cui si abbiano i concetti di uguaglianza, disuguaglianza e somma, coi relativi postulati caratteristici.

Il senso di tali formule è esattamente quello che ha la definizione della geometria nel programma di Erlangen di F. Klein, dove la geometria viene riguardata come studio delle proprietà invarianti delle figure rispetto a un gruppo di trasformazioni: si tratta insomma di illuminare in un senso particolare i rapporti che intercedono fra certe teorie, ravvisando qualcosa di comune nel loro studio.

Ma le anzidette definizioni delle matematiche non riescono nemmeno a coprire tutto il campo della scienza; per esem-

---

(1) *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. fr. in « Oeuvres », X, 339.

(2) *Math. Schriften*, ed. Gerhardt, III, 53.

pio la geometria proiettiva e la topologia resterebbero fuori da quelle formule.

Un nuovo indirizzo nella ricerca di una definizione delle matematiche è segnato dai logici matematici, che, tralasciando la considerazione dell'oggetto, si attaccano soltanto alla forma logica che la scienza è capace di rivestire nelle trattazioni più compiute. E così riescono a definire le matematiche come studio dei sistemi *ipotetico-deduttivi* di proposizioni. Appunto a questo concetto si riferisce la definizione paradossale di BERTRAND RUSSELL: « Le matematiche sono quella scienza, in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero ». Con ciò si afferma che i concetti primitivi della scienza sono assunti senza definizione, enunciando e postulando solo i loro rapporti logici; ed anche che ogni indagine sulla verità o meno dei postulati trascende la conoscenza matematica, rispetto a cui i postulati stessi figurano come *ipotesi arbitrarie,* soggette soltanto alla condizione di non contraddirsi.

Ma che dire di una visione puramente formale, che rimane affatto indifferente al contenuto del sapere?

Il *Corpus juris,* esposto in forma logica secondo l'ideale di Leibniz, diventerebbe senz'altro un ramo delle matematiche.

Non per nulla la tradizione della logica matematica si riattacca all'alchimia speculativa dell'*Ars magna,* costruita dal mistico catalano RAIMONDO LULLO. C'è anche nel pensiero di Leibniz e dei suoi continuatori l'idea di trarre dal nulla l'intero universo del sapere con la combinazione quasi meccanica di poche idee semplici. Qualcuno dei più recenti sognava di sviluppare sistematicamente tutte le identità algebriche secondo le regole fisse del calcolo, e non si rendeva conto delle migliaia e migliaia di operazioni inutili che occorrerebbe compiere prima di giungere a qualche formula significativa; e peggio ancora del fatto che quando qualcuna di queste si presentasse, vi si passerebbe accanto senza comprenderne il valore.

Ben altro è l'insegnamento della storia. Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono

posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l'errore. Dovremmo forse rigettare lontano da noi tutta questa somma di sforzi per celebrare autori delle matematiche quei logici che ne traducono il frutto nel loro linguaggio?

35. - Definizioni, assiomi e postulati

Per approfondire il concetto dei logici matematici conviene precisare le nozioni, già innanzi accennate, intorno all'ordinamento della scienza matematica.

Qualunque sia il significato degli enti cui lo studio si riferisce, la scienza procede per dimostrazioni logiche, deducendo successivamente un teorema da un altro che si assume già stabilito. La verifica sperimentale può ben suggerire la scoperta di una verità matematica — come accadde per l'area della cicloide tripla del cerchio generatore, che Galileo ha determinato col peso — ma non fornisce prova accettabile di questa verità, perchè lascia sempre il dubbio che la proprietà scoperta sia valida soltanto approssimativamente.

Ora la catena delle deduzioni che fornisce i teoremi deve far capo a principii, che non sono più dedotti similmente da altre proposizioni, ma debbono assumersi come noti *a priori*. Tali sono gli assiomi e i postulati che, nella tradizione classica, si enunciano sul fondamento di un'evidenza intuitiva. Senonchè la critica contemporanea, approfondendo l'analisi dei principii, è riuscita ad allargare tale concezione: *assiomi* e *postulati* (la distinzione stessa tende a cancellarsi nel pensiero contemporaneo) verranno ritenuti semplicemente come *ipotesi arbitrarie,* atte a reggere l'ordine deduttivo delle proposizioni della teoria, il cui valore dovrà essere saggiato nel suo insieme, anzichè da un giudizio portato esclusivamente sulle proposizioni primitive. Di questo arbitrio nella scelta dei principii il matematico ha appreso a valersi per indagare le conseguenze possibili di supposizioni diverse, ovvero per ordinare e sviluppare nella forma più economica le proposizioni di un corpo di dottrina, comunque acquisito, ecc.

In modo affatto analogo, l'assetto logico di una teoria deduttiva esige che i concetti che via via s'introducono vengano successivamente ricondotti ai concetti già noti, mediante *definizioni nominali*: chè altre definizioni, invero, non ammette la logica rigorosa. Ne consegue che la successione dei concetti di una teoria dovrà far capo a *concetti primitivi*, che — secondo la tradizione classica — venivano spiegati (mediante descrizioni o pseudodefinizioni) con riferimento all'intuizione o visione immaginativa degli enti di un mondo intelligibile. Ma le esigenze della critica contemporanea portano a rifiutare questo appello all'intuizione, che — in verità — equivale all'introduzione di postulati non formulati: pertanto i concetti primitivi, che nell'ordinamento logico, voglionsi dichiarare agli inizii della teoria, si assumono senza definizione, ritenendo che sieno *implicitamente definiti* dai rapporti logici espressi nei *postulati*.

Le norme della nuova logica così riassunte, scaturiscono come frutto maturo da una lunga evoluzione delle idee, che ho cercato di spiegare nel mio libro « Per la storia della logica ».

Qui mi propongo di svolgere alcune riflessioni sulle conseguenze che esse comportano.

La teoria matematica concepita nel suo assetto logico di « *sistema ipotetico-deduttivo* », è un frammento di scienza che lo studioso assume come qualcosa di compiuto, isolandolo da ogni altro sapere: il giudizio sulla intera coerenza della teoria è indipendente dal valore delle ipotesi, purchè queste non sieno contraddittorie, e anche dal significato dei concetti che in essa figurano. Infine però il giudizio sulla teoria fa appello a qualcosa che è fuori di essa: sia che, trattandosi di dottrina fisico-matematica vogliansi sottoporre le sue conseguenze a verifiche sperimentali, sia che si assuma come norma di valutazione il confronto con altre teorie matematiche basate su presupposti intuitivi, ecc.

In altre parole la teoria logicamente ordinata, secondo i criterii che abbiamo descritti, non è che un *momento* del pensiero del matematico che aspira al più largo possesso della scienza. I logici-matematici che in questo momento si fer-

mano, conferendogli un valore *sub specie aeternitatis*, vengono portati alla tesi paradossale che le verità matematiche sono soltanto tautologiche.

36. - Le matematiche come tautologia

Il teorema di Pitagora — dicono i logici-matematici — non interessa le matematiche come relazione sensibile fra i quadrati di carta che possiamo costruire sui lati di un triangolo rettangolo materiale, ma solo in quanto può essere dimostrato logicamente deducendolo dai postulati della geometria euclidea; la verifica sperimentale, oltrechè imperfetta, non dice nulla rispetto a tale deduzione, in cui consiste invece, esclusivamente il valore matematico del teorema: questo valore riesce affatto indipendente dal giudizio che possa darsi intorno ai postulati anzidetti, il quale oltrepassa il compito del matematico. Ora la deduzione non fa che mettere in luce la dipendenza logica delle proposizioni dedotte dalle premesse, mostrando che la verità di quelle è contenuta nella verità di queste, sicchè infine tutto lo sviluppo delle matematiche si riduce ad una mera tautologia.

Per intendere questo giudizio e correggerlo già da un punto di vista strettamente logico, bisogna rifarsi alla posizione filosofica del *realismo* scolastico che esso in qualche modo suppone.

Il logico lavora colle « proposizioni » ed attribuisce un senso primitivo alla distinzione fra « proposizioni *vere* » e non vere.

La verità si ammette che significhi *a priori* qualcosa come « esistenza » in un mondo intelligibile. Le proposizioni dedotte l'una dall'altra appariscono oggetti di codesto mondo, coincidenti o rientranti l'uno nella classe degli altri; così il logico *vede* le conseguenze rientrare nelle premesse: lo sviluppo delle matematiche non arricchisce la sua prospettiva su quel mondo in cui scorge sempre la medesima cosa che vi ha posto in principio.

Ma le proposizioni non sono oggetti di un mondo esteriore dato al pensiero, bensì esprimono un processo costruttivo di

concetti: la proposizione « *a* è *b* » significa precisamente che *a* è un individuo della classe che risponde al concetto astratto *b*. Il significato delle matematiche, pur considerato nel suo aspetto logico, apparirà in una luce assai diversa se, in luogo di guardare alle dimostrazioni, si guardi piuttosto alle definizioni, mercè cui si costruiscono oggetti di studio via via più elevati. Il carattere tautologico delle dimostrazioni, nel senso rilevato innanzi, ci dice insomma che gli elementi dei concetti costruiti in tal guisa per associazioni e dissociazioni d'idee (definizioni per riunione o per interferenza, ecc.) rimangono sempre identici a se stessi, traverso le operazioni mentali con cui vengono combinati. Ma la casa, pur restando formata dagli stessi mattoni, costituisce qualcosa di nuovo rispetto alle cose che hanno servito a fabbricarla.

Abbiamo confutato la tesi tautologica anche dal punto di vista interno di chi guardi alle teorie matematiche come ordine deduttivo già formato. Ma non è affatto ammissibile mutilare il pensiero restringendosi a questa veduta. Perchè essa rompe non solo l'unità della scienza, sì anche l'opera stessa del logico-matematico, che è di regola un critico dei principii e un ordinatore di teorie.

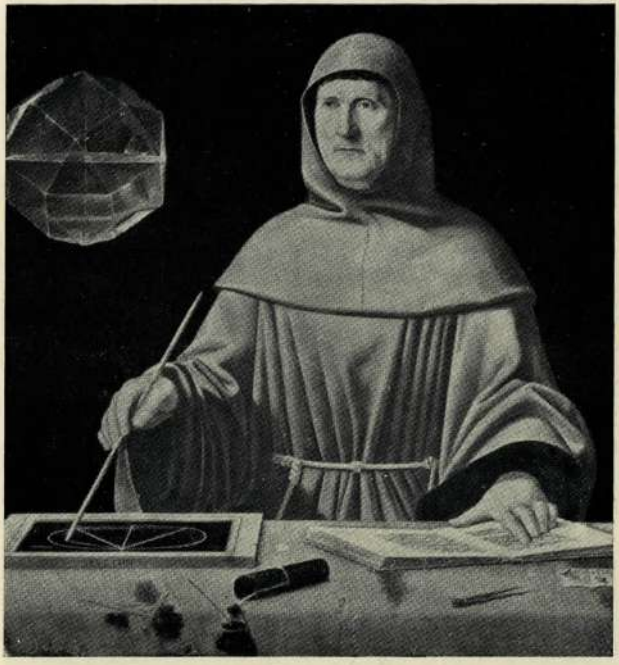
Intanto il significato scientifico generale delle teorie matematiche ci riporta alla considerazione delle forme immanenti nella natura o delle intuizioni dello spirito che esprimono almeno una realtà universale umana, offrendosi egualmente a chi pensa come qualcosa di dato. Respingere le idee che hanno il più lontano rapporto coll'occhio, o coll'orecchio o col tatto, vedendo nelle sensazioni non le porte della conoscenza, ma soltanto l'occasione di errori peccaminosi, questo strano pudore dei logici-matematici ci richiama alla memoria Plotino e quegli asceti cristiani del Medio Evo che si vergognavano di avere un corpo.

37. - Le matematiche come scienze naturali

Riflesso di un ordine esteriore o della stessa attività della nostra mente che elabora le immagini sensibili, il regno delle verità matematiche non si lascia comprendere come qualcosa

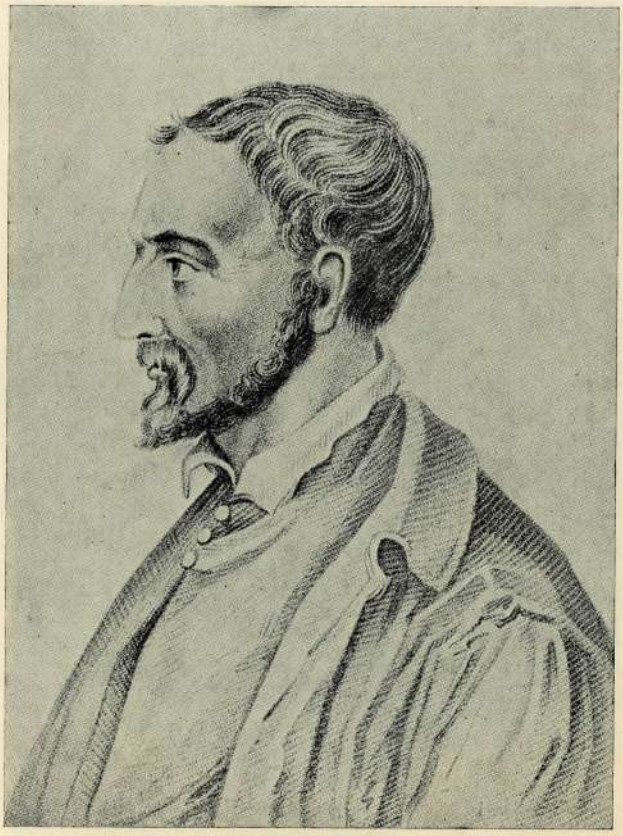
di artificialmente costruito. Perciò i matematici parlano sempre di *scoprire,* anzichè di inventare, e CARLO HERMITE assomigliava il lavoro matematico alla classificazione e alla descrizione del naturalista. Se pur non esistano nel mondo fisico gli enti matematici, che vengono foggiati dal pensiero astratto nello sforzo di comprendere ed unificare i fenomeni, si deve riconoscere che questo lavoro non dipende dal puro arbitrio della fantasia, ma si svolge secondo un ordine necessariamente determinato, sicchè gli enti costruiti hanno in qualche modo un'esistenza, come termine del processo costruttivo. Più precisamente conviene distinguere a questo riguardo diversi rami delle Matematiche. Le prime figure che ci offre lo studio della Geometria — i triangoli, i cerchi, le coniche, ecc. — si presentano a noi come qualcosa di dato, in cui convergono e si accordano, quasi per miracolo, certe proprietà, in guisa da dare l'impressione di un'armonia che si discopre allo studioso, come nella natura. Le costruzioni dei più semplici poligoni regolari, ad esempio dell'esagono e specialmente del pentagono (dove interviene la divisione aurea del segmento) hanno suscitato l'ammirazione dei geometri antichi, tantochè si narra che, per celebrare la scoperta di quest'ultima nella scuola pitagorica si sarebbe fatto un sacrifizio agli Dei. I poliedri regolari raccolgono pure congiunte, in pochi tipi ben definiti, proprietà mirabili. Platone che li chiamava « figure cosmiche » ne faceva gli elementi costruttori della Natura.

La medesima impressione di studiare qualcosa che esista per sè, ci reca lo studio dell'Algebra. Ciò che a prima vista si presenta qui come una irregolarità (per esempio l'esistenza di più o meno radici di un'equazione di dato grado), sembra invitarci ad approfondire un mondo nascosto adombrato dalle formule, dove tutto verrà ricomposto in un'armonia superiore. Tale è il campo delle variabili immaginarie o complesse, che dà — in quest'ordine di ricerche — qualcosa di chiuso e di non superabile: poichè in esso le operazioni fondamentali dell'aritmetica si estendono, soddisfacendo alle proprietà formali, mentre non è possibile una estensione analoga a numeri con più unità. È poi meraviglioso che in que-



LUCA PACIOLO
(1445-1509)

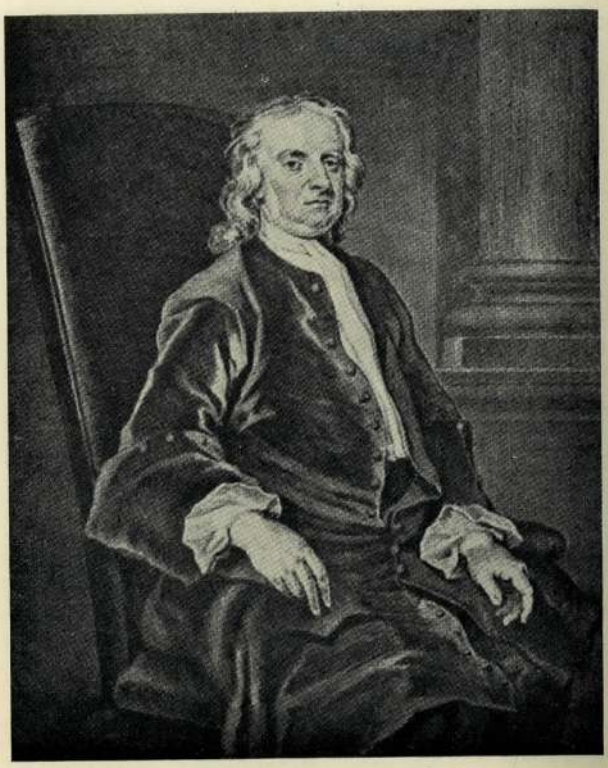
Nicolò Tartaglia
(1499-1557)



GEROLAMO CARDANO
(1501-1576)

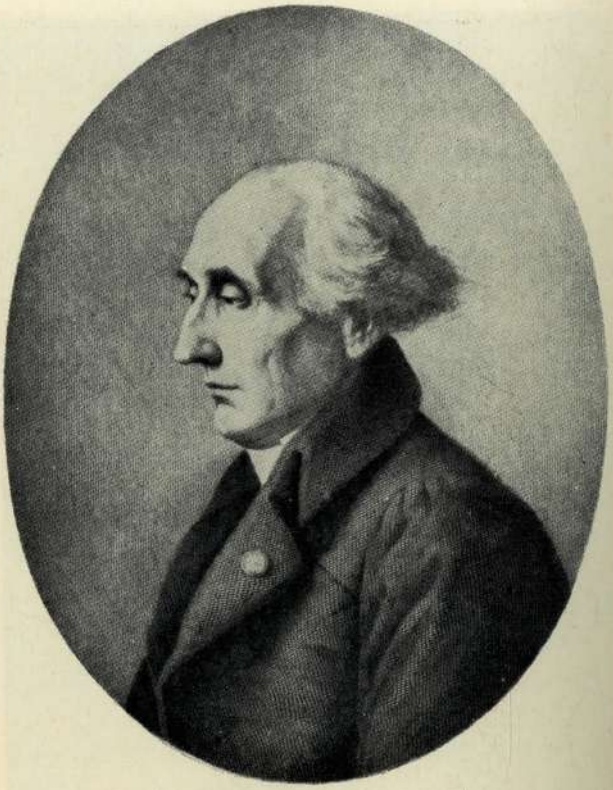
GALILEO GALILEI
(1564-1642)

PIETRO FERMAT
(1601-1665)

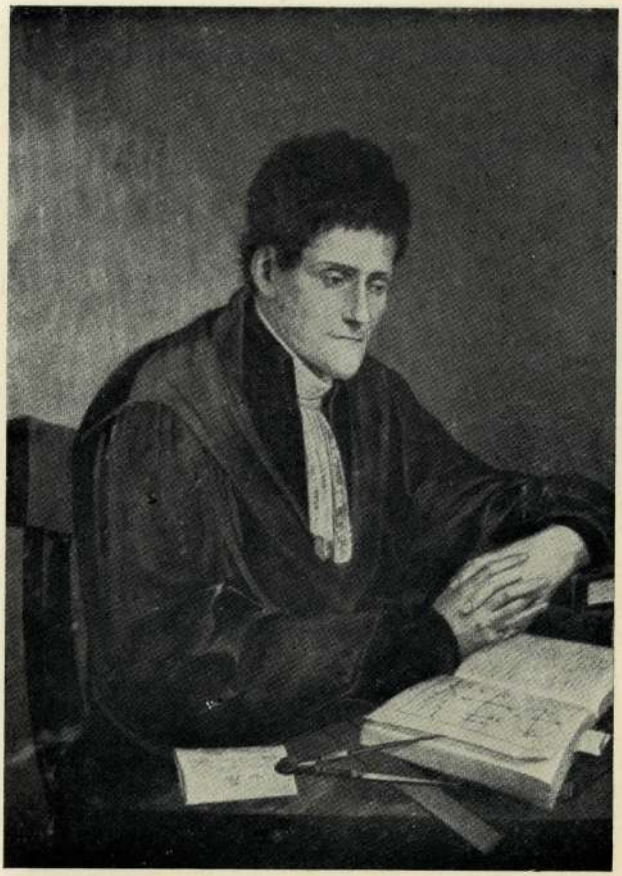


Isacco Newton
(1642-1727)

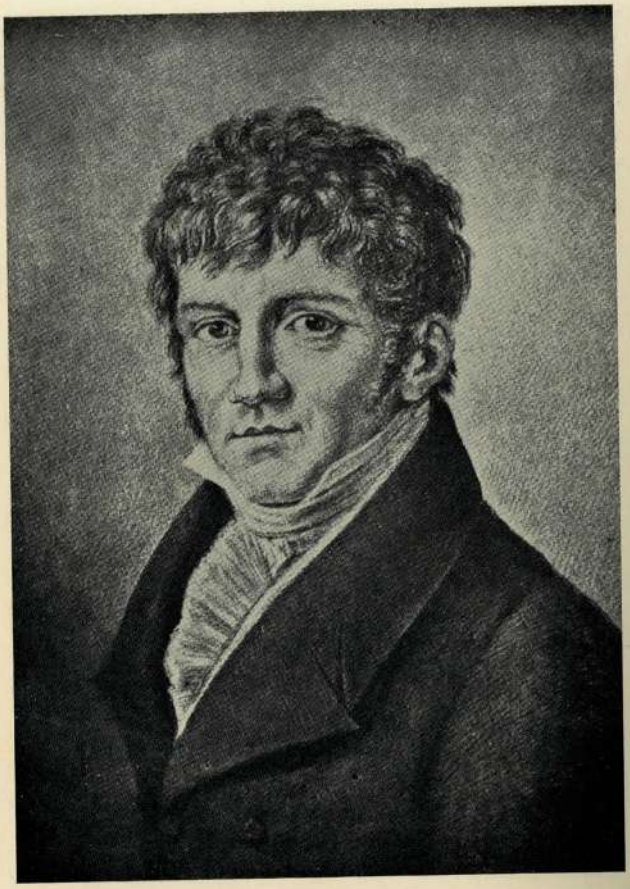
LEONARDO EULERO
(1707-1783)



GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE
(1736-1813)

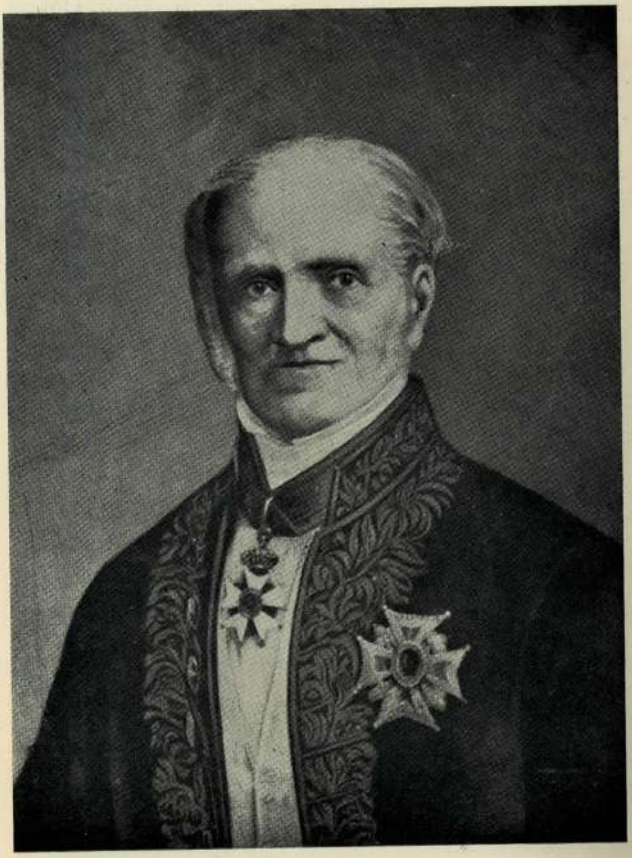


Paolo Ruffini
(1765-1822)



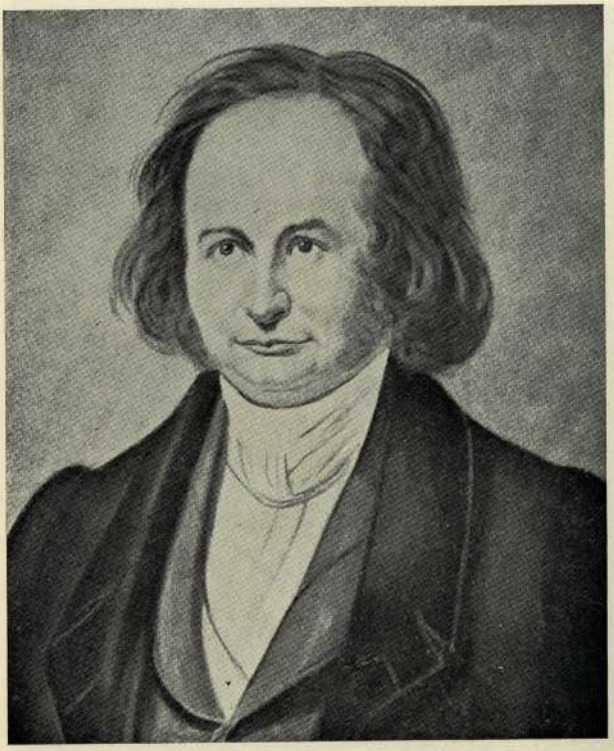
Carlo Federico Gauss
(1777-1855)

AGOSTINO LUIGI CAUCHY
(1789-1857)

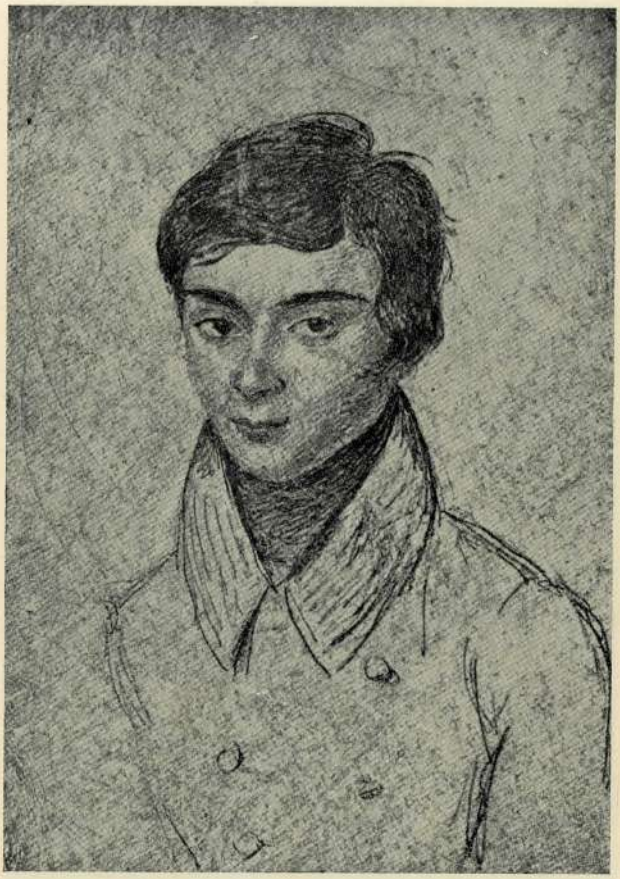


MICHELE CHASLES
(1793-1880)

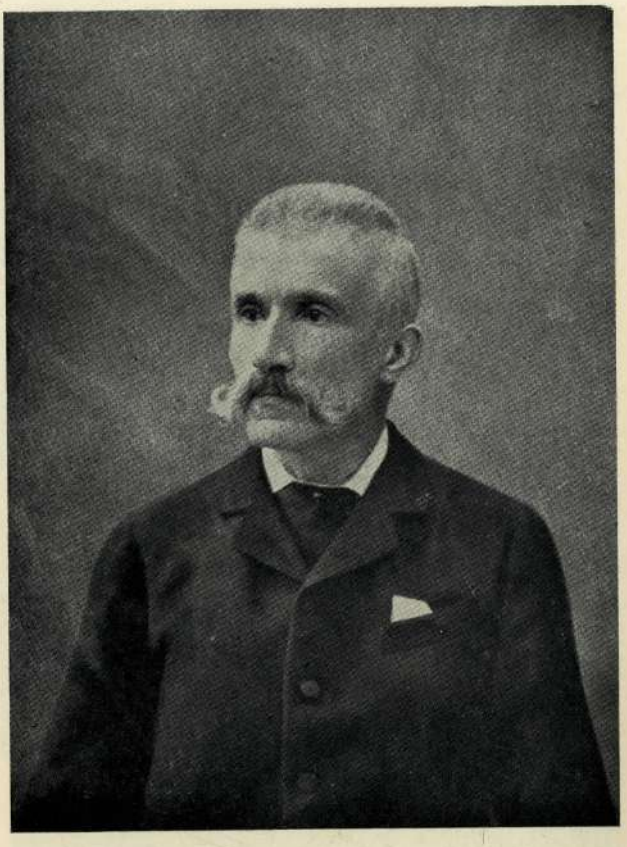
N. Enrico Abel
(1802-1829)



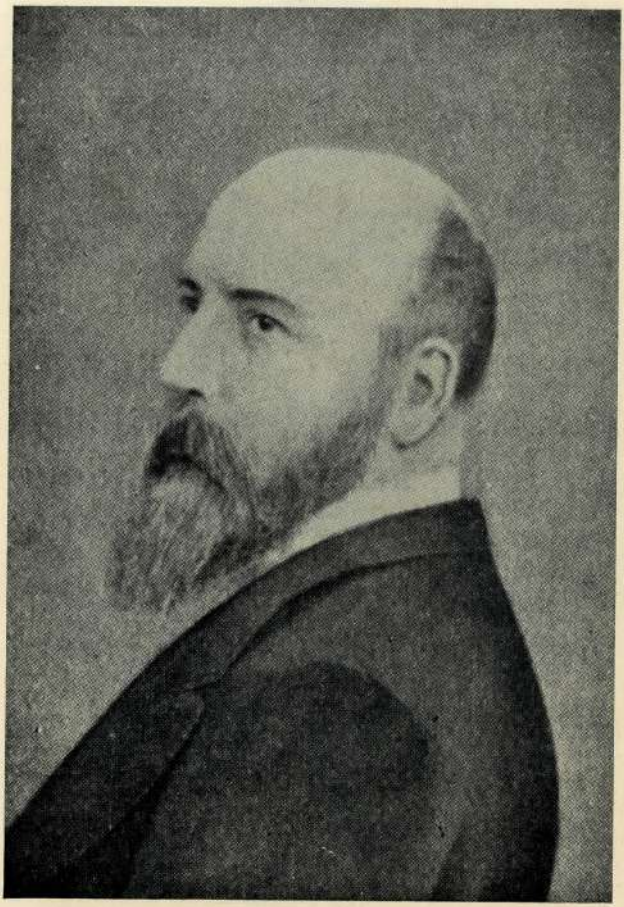
Carlo Gustavo Jacobi
(1805-1851)



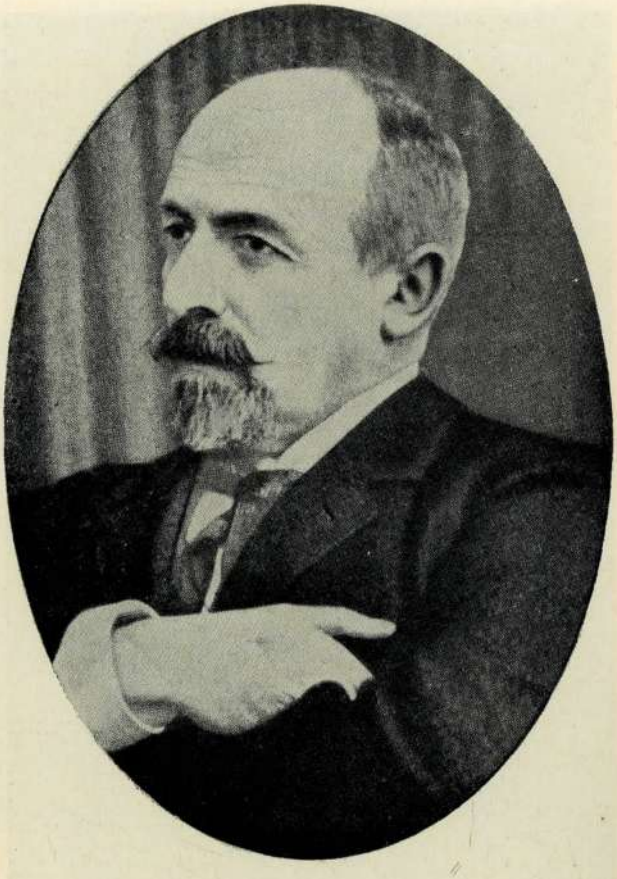
EVARISTO GALOIS
(1811-1832)



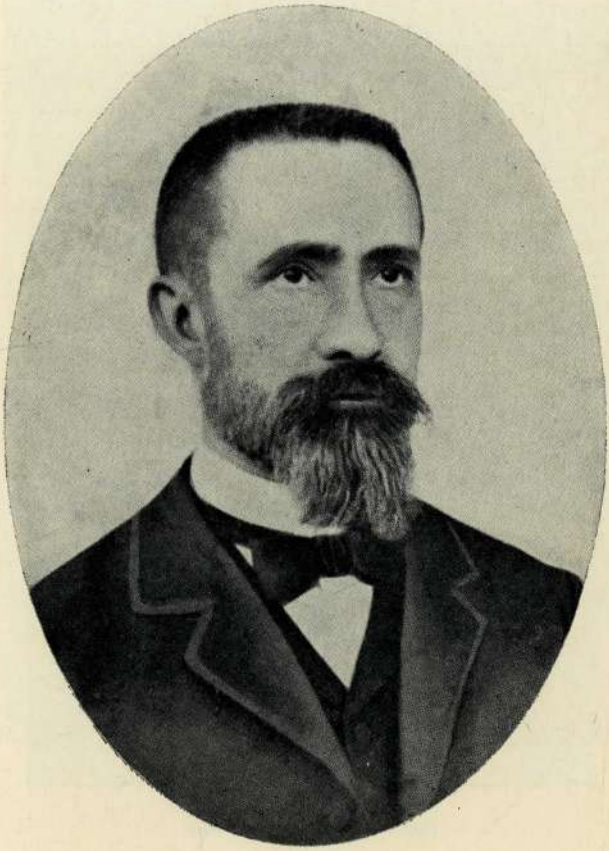
FRANCESCO BRIOSCHI
(1824-1897)



LUIGI CREMONA
(1830-1903)



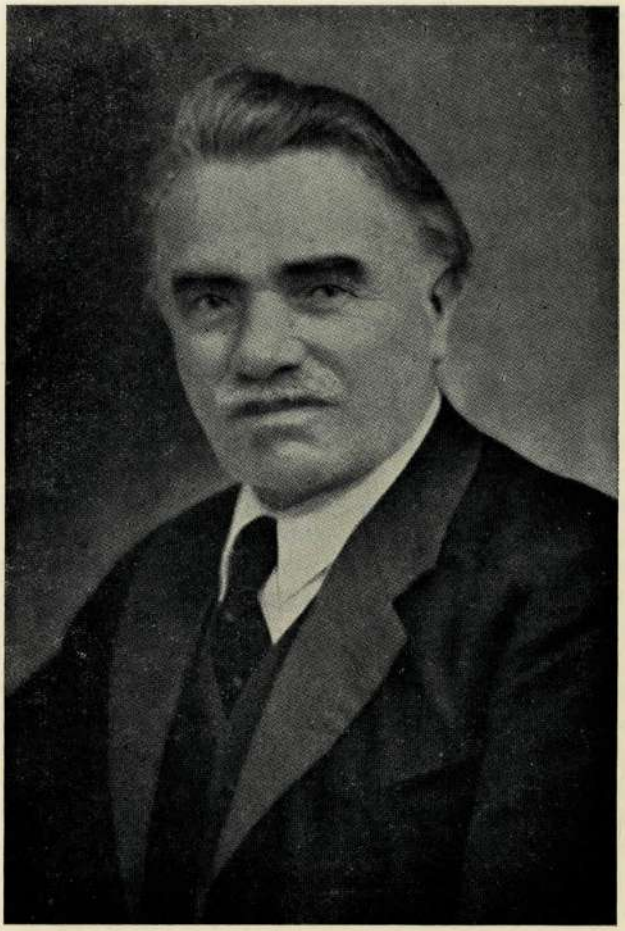
GIORGIO CANTOR
(1845-1918)



Ulisse Dini
(1845-1918)

SALVATORE PINCHERLE
(1853-1937)

Enrico Poincaré
(1854-1912)



Luigi Bianchi
(1856-1928)

sto stesso campo le funzioni, anche non algebriche, abbiano un'esistenza naturale, che resta definita in tutta la sua estensione quando sieno date in un intervallo comunque piccolo. Così tutti gli enti che si offrono allo studio nella teoria delle funzioni di variabile complessa, danno egualmente la sensazione di esistere prima e indipendentemente dal nostro riconoscimento, quasi a testimonianza di un ordine creato fuori di noi. Citiamo un solo esempio: l'intima parentela che, in codesto campo ha scoperto EULERO fra l'esponenziale e le funzioni circolari.

Non è più lo stesso in altri rami di studio, come la teoria delle funzioni di variabile reale, ovvero la teoria degli insiemi. Perchè qui lo spirito scrutando le condizioni che valgono a definire logicamente certi enti dati, viene, per così dire, a decomporne il concetto in serie di proprietà, che rispondono ad enti più generali, non più definiti nella comune intuizione, ma — in misura più o meno larga — costruibili ad arbitrio: i quali perciò appaiono spesso artificiali. Tali sono, per esempio, certe funzioni ovunque discontinue, ovvero continue prive di derivata: e ancora le curve che riempiono una superficie, gl'insiemi dotati di proprietà affatto impreviste, ecc., il cui significato si ricollega allo studio degli enti intuitivi solo in maniera indiretta, come mezzo di analisi concettuale.

A questo proposito è interessante notare che, abbandonando il campo dell'intuizione per indagare problemi più generali ed astratti, la mente del matematico va incontro a dubbi e difficoltà d'ordine nuovo di cui offre esempio la questione « se si possa *bene ordinare* il continuo » [1], dove non si sa invero che cosa significhi tale ordinamento: se un criterio di costruzione effettivo, ovvero la semplice impossibilità di dedurre un assurdo dall'ipotesi dell'ordine dato. Qui si af-

---

[1] Buon ordinamento significa ordine tale che ogni parte dell'insieme abbia un primo elemento, e, in particolare, dopo ogni elemento si trovi un successivo immediato. Il modo d'intendere tale ordinamento divide in fatto i matematici in due schiere (i cosidetti empiristi ed idealisti di DU BOIS REYMOND), secondo la loro mentalità.

faccia alla mente una nota immagine di Kant: la colomba leggera, portata dalle ali sull'aria, crede di poter volare senza resistenza nel vuoto!

38. - Logica dell'intelletto e logica della ragione

Se, come abbiam detto, il valore di una teoria matematica fa appello a qualcosa che è fuori dell'ordine formato delle sue proposizioni, il matematico che nel suo sforzo di astrazione e nel suo desiderio di compiutezza ha purificato la logica discorsiva, si trova condotto a riconoscere che questa *logica dell'intelletto* postula un giudizio superiore della ragione, che lo porta al di là delle stesse matematiche o almeno di ogni particolare dottrina di questa scienza.

Distinguere una « logica della ragione » che supera la semplice « logica dell'intelletto » non è comune fra i matematici. Il loro amore per ciò che è chiaro e preciso li induce volentieri a concentrare tutta l'attenzione sui criterii meccanici del rigore formale della deduzione o della definizione. Ma, il significato che assume il giudizio razionale si può illustrare anche senza uscire dall'ambito delle teorie particolari, purchè si esamini il loro ordinamento, non già come qualcosa di fatto, ma come un problema. Già si è detto che i logici-matematici fautori della tesi tautologica debbono metter fuori della porta delle matematiche anche la propria opera. Debbono dimenticare, ad esempio, che nella realtà del loro stesso pensiero la sfera o il cubo si trovavano prima del punto, della linea retta e della superficie piana mercè cui sono riusciti a definirli; e ignorare il senso delle definizioni con cui hanno voluto ricostruire nel pensiero e così conoscere gli enti definiti.

La discussione sulle definizioni mostra in molti casi quale senso logico più largo venga ad assumere il giudizio razionale.

Nella teoria delle coniche è lecito prender le mosse da una definizione genetica quale è la descrizione mediante fasci proiettivi di Steiner; ma questa definizione è relativa alla scelta di due punti arbitrarii sopra la curva e quindi occorre

dimostrare che la curva stessa riesce definita egualmente a partire da due altri punti qualunque di essa; a meno che non si preferisca accogliere un'altra definizione (come quella di Staudt colla polarità) rispetto a cui non appaiano, *a priori*, punti privilegiati.

Nella classificazione delle curve piane algebriche, si può assumere, per atto arbitrario di definizione, diversi caratteri: sia, p. es., i gradi dell'equazione in coordinate cartesiane rispetto alle variabili separate (come faceva Descartes), sia il grado complessivo rispetto ad esse. Ma nel primo caso l'ente definito ha un rapporto particolare cogli assi coordinati, che sono — per riguardo alla curva — elementi estrinseci, sicchè i caratteri introdotti non sono invarianti rispetto a trasformazioni di coordinate e tanto meno rispetto ad omografie generali. Perciò nello sviluppo della teoria delle curve si è imposta la necessità (necessità razionale, ma non logica in senso stretto) di sostituire la seconda definizione alla prima.

Vi sono rami della geometria in cui si studiano le proprietà invarianti di una classe di figure di fronte ad un certo gruppo di trasformazioni; per esempio le proprietà delle curve di fronte alle trasformazioni birazionali. Qui conviene introdurre caratteri che sieno del pari invarianti rispetto alle medesime trasformazioni. Se ci si accosta alla teoria da qualche altro punto di vista (per esempio si definisce il genere delle curve in relazione all'ordine e al numero dei punti doppi, cioè come carattere proiettivo), si deve fornire la dimostrazione che esso non varia per trasformazioni birazionali.

Da questi esempi si vede che l'arbitrio della definizione è sottomesso a criterii razionali di cui il matematico deve tener conto: la sua *libertà*, proprio come nella vita, implica *responsabilità*.

Del resto, in ogni scienza, la definizione dà luogo ad un problema scientifico; che risponde all'esigenza male espressa dai logici del passato col parlare di *definizioni reali*. Si tratta, in genere, di costruire e definire intensivamente (cioè per mezzo delle sue proprietà) il concetto astratto degli oggetti di una classe che sia estensivamente data. Così appunto il

problema si presenta a Socrate, nei dialoghi platonici. Non vi è differenza essenziale se gli oggetti di cui si discorre sieno intelligibili anzichè sensibili, come accade per gli enti matematici: la ricerca di una definizione corrispondente alla classe porta, in ogni caso, allo studio e al confronto delle proprietà caratteristiche comuni dei suoi elementi. (1)

Ciò che si è detto per la definizione si può ripetere, analogamente, per la scelta dei postulati che definiscono implicitamente un sistema di concetti, da porre a fondamento di una teoria deduttiva.

39. - Giudizii di valore

Colle riflessioni precedenti tocchiamo ai giudizii di valore. Ogni attività umana, sia nel pensiero sia nella vita, riesce intelligibile soltanto in rapporto ad un ordine di fini, cui i valori si commisurano. Il fine dell'attività può essere immediato, quando si tratta di rispondere ad esigenze vitali, o mediato, in quanto le cose ricercate valgono quali mezzi per procurare altri fini. Ma, per una nota legge psicologica, ciò che viene ricercato dapprima come mezzo finisce per essere desiderato come fine (si pensi all'oro accumulato dall'avaro!): e già la circostanza di dilatare le nostre possibilità si accompagna ad un senso di piacere.

Le Matematiche sono apprezzate dapprima per le applicazioni tecniche e scientifiche di diverso ordine, che ne derivano, ma — in vista di ciò, ed anche per l'interesse filosofico ed estetico che vi si collega — diventano, di per se stesse, valori, al cui possesso tendono gli sforzi secolari dell'attività pensante. La coordinazione di tali sforzi nella società degli uomini conferisce a questi valori qualcosa di obiettivo che esorbita dalla sfera dei puri soggetti individuali.

Ci sono criterii di valutazione che possono spiegarsi con ragioni ma non sono suscettibili di definizione precisa; le stesse ragioni di cui si parla fanno capo, in ultima analisi,

---

(1) Cfr. F. Enriques, *La definizione come problema scientifico*. « Periodico di Matematiche », 1927.

alla veduta di certe direttive del progresso scientifico che si osservano nella storia. Così appaiono, *a priori,* importanti le ricerche che tendono a stabilire un legame fra ordini di concetti diversi e non ancora ravvicinati; ed anche senz'altro, quelle che mirano alla risoluzione di problemi tramandati da una lunga tradizione, in ispecie se offrano particolari difficoltà: infatti per superare tali difficoltà, occorrerà in generale riconoscere qualche nuova veduta, un non sospettato legame di idee, che consenta di stabilire il ponte fra il noto e l'ignoto.

Il progresso delle scienze matematiche porta, da un lato alla differenziazione di discipline particolari, in ciascuna delle quali si tende a sviluppare un ordine chiuso di concetti, secondo un ideale purismo (si pensi alla geometria proiettiva e d'altra parte all'aritmetizzazione weierstrassiana di molte dottrine analitiche!); ma porta d'altro lato il più largo confronto di metodi e d'idee, e tende così all'unificazione delle discipline diverse in una veduta superiore della scienza. Queste tendenze si rispecchiano nei criterii razionali che stanno a base dei giudizii valutativi della ricerca. Ogni matematico ha di ciò una qualche consapevolezza; ma in misura assai variabile l'uno dall'altro, e senza rapporto diretto coll'abilità tecnica ch'egli possegga. La tecnica abilita a sciogliere problemi già posti, la ragione valutativa si esprime soprattutto nel porre problemi importanti, influendo quindi sull'evoluzione ulteriore delle ricerche. Senonchè, nella pratica, la distinzione di tali qualità riesce alquanto difficile, perchè è malagevole giudicare di un problema non ancora risoluto: se la posizione di esso importi già un indirizzo di ricerca, o un avvicinamento istruttivo d'idee, ovvero costituisca un ideale puramente astratto, fuori di ogni attuale possibilità.

Su questa materia è tanto più difficile formarsi un giudizio perchè essa non è, come il rigore logico, argomento quasi quotidiano di pubblica discussione; in difetto di criterii precisi, della importanza delle ricerche i matematici discorrono meno volentieri, e di solito soltanto nei rapporti confidenziali di colleghi o di maestri e scolari. La discus-

sione stessa, quando si fa, rischia di essere turbata da motivi estrinseci, come sono la boria degli autori e l'affetto che essi portano agli indirizzi intorno a cui hanno speso le loro fatiche, certe influenze della moda scientifica e— più pericolosa di tutti — la seducente facilità di taluni problemi. Il consiglio migliore che possa darsi a chi si affaccia giovane a questo campo di studi è d'ispirarsi all'esempio dei grandi matematici. La lettura di Archimede, Galileo, Cavalieri, Newton, di Eulero, Lagrange, Gauss, Abel, Riemann, Poincaré, ecc. per volger di tempo non ha perduto il suo valore suggestivo; a tali esempi si attingeranno sempre nuovi e preziosi insegnamenti. Ma a condizione di non imitare o proseguire semplicemente i metodi o le idee che si apprendono, anzi di giudicarne con criterio storico, in relazione al momento scientifico in cui si producono.

Vi sono esempi e considerazioni che, in un dato momento si affrontano dagli ingegni più potenti, perchè recano alla scienza qualcosa di nuovo e d'interessante, e che — in un momento successivo — hanno esaurito il loro interesse, come quelli che possono ormai moltiplicarsi senza difficoltà. CHASLES concludeva il suo classico studio sulle trasformazioni (specialmente omografiche) delle figure dicendo « Peut donc qui voudra devenir géomètre à volonté, le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice ». E poco dopo, estesosi enormemente il concetto delle trasformazioni, si vedeva pullulare una schiera di geometri, coltivanti quella che fu argutamente chiamata la tictac-geometria: la deduzione di nuove proprietà delle figure costruite come trasformate di figure note. Sul quale soggetto non hanno perduto del loro significato le osservazioni di CORRADO SEGRE, nel suo bell'articolo « Su alcuni indirizzi dell'investigazione geometrica ». (1) Infatti la conoscenza approfondita delle trasformazioni permette *a priori* di ritener note, e fra loro identiche in un certo ordine d'idee, tutte le figure che a mezzo di esse possono dedursi l'una dall'altra. Qui occorre una riflessione d'ordine generale.

---

(1) « Rivista di matematica », vol. I, Torino. 1891.

Se si riprende, in qualche modo, la similitudine platonica del « Fedro », paragonando il pensiero ad un cavallo alato, conviene tener presente questa differenza: che il cavallo come l'uccello più veloce, quando sia segnata la sua via, deve sempre impiegare un certo tempo a percorrerla, laddove il pensiero, se gli s'indichi la via per cui può sicuramente giungere ad una certa meta, si trova giunto a questa nell'atto stesso del partire: se invero, con un dato metodo o calcolo sappiamo di poter dimostrare una certa proprietà, questa è già per ciò stesso guadagnata e dimostrata.

Così, certi progressi conseguiti nello studio matematico, contengono virtualmente altri progressi, che vi è soltanto da notare. Per esempio, la scoperta di nuove funzioni o enti tipici, contiene spesso, sotto l'apparenza del particolare, conoscenze affatto generali, sicchè la generalizzazione di esse non reca un vero arricchimento della scienza; reca invece, molte volte, un'espressione più astratta delle nozioni già acquisite, dove è dato men facilmente d'intendere quel che ne costituisce il valore.

Infine, giova enunciarlo nella forma più generale: pei *valori* dello spirito come per quelli materiali dell'economia, sussiste una *legge di degradazione*: Non si può goderne pacificamente il possesso ereditario, se non si rinnovino ricreandoli nel proprio sforzo d'intenderli e di superarli, e per ciò non esiste alcun criterio strettamente logico. La valutazione delle ricerche matematiche si fa soltanto dal matematico, con riferimento concreto alle idee, alle nozioni, ai problemi, che si tratta di valutare.

Capitolo V.

MATEMATICHE E ARTE

40. - Le matematiche come arte

Si è detto che l'oggetto delle matematiche — ordine immanente nella Natura — si discopre alla mente traverso un processo d'astrazione; appunto per ciò le matematiche non sono soltanto scienza, rappresentazione di quell'oggetto, sì anche arte, cioè espressione del soggetto che le costruisce, secondo le sue intime leggi. Si esprime proprio in essa il senso profondo dell'ordine, della proporzione e della miura, che farà un cosmo del caos dei fenomeni.

Naviganti pel mare dell'Italia meridionale e della Sicilia, gli antichi Pitagorici, contemplando nella notte il cielo stellato, cercavano di comporre le distanze di quelle luci lontane in armonie di numeri, che — come dice Platone — sono più belle delle meraviglie del cielo che sono nel mondo visibile.

E come se l'Universo rispondesse al loro sentimento interiore, codeste armonie divenivano a poco a poco per loro una musica celestiale, insensibile all'orecchio che vi è abituato, ma presente allo spirito dei contemplanti, nella pace gioiosa dello spettacolo. Così la tradizione storica colorita di poesia, ci riporta il sentimento che ispirò i primi passi della ricerca matematica.

L'entusiasmo che si accompagna alle scoperte di quei poeti, deve essere inteso nel senso etimologico della parola, come estasi mistica di chi partecipa ad una rivelazione divina. Essi comunicavano colla divinità, al modo degli Orfici, non più nell'ebbrezza del culto di Dioniso, bensì nella bellezza delle proporzioni e delle forme simboleggiata da Apollo.

A distanza di secoli la commozione di chi coglie una

« nota del poema eterno » si sente ancora nel linguaggio dei grandi matematici e fisico-matematici. KEPLERO (nell'« Harmonices mundi ») avendo riconosciuto la sua terza legge sul moto dei pianeti (i quadrati dei tempi periodici proporzionali agli assi maggiori delle orbite ellittiche) scioglie un inno alla propria scoperta: « Da otto mesi ho visto il primo raggio di luce, da tre mesi ho visto il giorno, e da qualche giorno il puro sole della più ammirabile contemplazione. Nulla mi trattiene, e mi lascio andare al mio entusiasmo. Io voglio confondere i mortali con l'ingenua confessione che ho rubato i vasi d'oro degli Egiziani per farne un tabernacolo al mio Dio, lungi dalle frontiere dell'Egitto.... Il dado è tratto e scrivo il mio libro: sarà letto oggi o domani dalla posterità, poco importa; esso potrà attendere il suo lettore cent'anni, poichè Dio ha aspettato seimil'anni un contemplatore della sua opera ».

Qui la commozione estetica si esprime come davanti alla bellezza di uno spettacolo della Natura. Ma la stessa commozione accompagna le più alte creazioni delle matematiche pure. W. Bolyai, comunicando al padre la sua scoperta della geometria non-euclidea, gli scriveva: « Dal nulla ho tratto un nuovo mondo ». Il matematico ha il sentimento che l'opera della sua immaginazione creatrice dia la vita ai fantasmi evocati, come accade similmente al poeta. Perciò Weierstrass poteva dire che « un matematico il quale non abbia in sè nulla di poetico non sarà mai un matematico completo ».

Ed invero anche nelle espressioni più modeste dei loro autori, coloro che scoprono una verità matematica vedonsi contemplarla come l'artista guarda all'opera sua; la quale anche a chi la consideri di fuori appare sempre opera di bellezza, quando diversi concetti e proprietà vengono a fondersi meravigliosamente in un'armonia superiore di numeri o di forme.

41. - IL SENSO MATEMATICO NELL'ARTE CLASSICA

In confronto alle arti propriamente dette, le matematiche esprimono soltanto un'intima esigenza dello spirito ra-

zionale, restando affatto indifferenti alle passioni e agli affetti di cui quelle riflettono il tumulto. Perciò il valore artistico delle Matematiche, più ancora che nelle sue creazioni proprie si rivelerà nel connubio colle arti figurative (pittura, scultura, architettura) o colla poesia e colla musica. Qui esse si discoprono come regole di proporzione e di misura — regola di prospettiva e di rilievo, canoni della razionalità architettonica, metrica e contrappunto — che fino dall'antichità fascinarono gli studiosi delle nascoste armonie, e che Dante vede costituire « lo fren dell' arte ». Il disegno dei mondi ultra-terreni, esplorati nella *Divina Commedia*, è scolpito con precisione geometrica e le proporzioni numeriche sono strettamente serbate anche nella ripartizione dei versi fra le tre Cantiche, e nei canti che le compongono.

Ma che significa questo freno dell'arte? È desso un criterio che limita l'opera dal di fuori, in maniera estrinseca e convenzionale, siccome apparirebbe dalle polemiche dei romantici?

Certo l'essenza della poesia e della musica non si commisura al criterio aritmetico del ritmo e delle battute, nè le opere dell'arte figurativa si lasciano giudicare *a priori* secondo le forme od i tipi suggeriti dai modelli classici. Ma chi argomenta in tal guisa sembra disconoscere il carattere essenziale dell'arte classica. La quale non nasce, ricevendo da fuori la norma della misura siccome qualcosa di sovrapposto, ma — arte vera — esprime un momento dell'animo dell'artista: il momento in cui il tumulto delle passioni viene composto e dominato in un'armonia superiore che s'innalza sui motivi discordi come tipo di perfezione o « idea ». Nella ricchezza spirituale di questo momento, che è per così dire un contatto del mondo dei sensi colla ragione, sta il significato sublime dell'arte classica, e l'apporto non estrinseco che ad essa reca lo spirito matematico. Da ciò anche si spiega il significato che le matematiche assumono nella storia dell'arte.

42. - Influenze matematiche nell'arte e nella letteratura

A prescindere dall'influenza sulla tecnica (della pittura o dell'architettura, ecc.) c'è un'influenza più intima che gl'ideali matematici esercitano sul gusto e sui criterii degli artisti.

Questi criterii fan parte veramente della creazione artistica se sono sentiti come espressione di un concetto particolare della bellezza, che si appaga nella disciplina armonizzatrice. Invece non è vero artista chi, divenuto indifferente ai motivi della creazione, prende a modello l'opera altrui e — traendo i suoi canoni dalla convenzione o dai rapporti di misura concepiti a priori — trascorre così nella fredda accademia. In questo senso, l'intromissione riflessa di criterii matematici ha potuto pregiudicare l'arte, come si vede più volte nella storia. E già nell'antica Grecia se ne hanno esempi caratteristici. Citiamo Ippodamo di Mileto, l'ingegnere imbevuto delle idee pitagoriche, che disegnò il tipo della città geometrica con due sistemi di strade diritte perpendicolari, mentre portava il suo misticismo aritmetico nello schema della costituzione della *polis* a base ternaria, che sarà ripreso da Dicearco; e ancora Policleto, l'autore del « canone » artistico basato sulle proporzioni del corpo umano, il cui errato criterio (che sostituisce la proporzione vera all'apparente) verrà corretto soltanto da Lisippo, nell'epoca alessandrina.

Senonchè questi stessi errori fan parte dell'esperienza dell'artista che nel suo mondo fantastico ricerca il disegno d'una natura ordinata secondo leggi matematiche. Perciò le intuizioni neo-pitagoriche e neoplatoniche, risorgenti negli animi del Rinascimento porgono i motivi della pittura di Masaccio e dei maestri del nostro Quattrocento: l'ordine prospettico, la proporzione e la misura delle linee e delle superficie, realizzate secondo regole geometriche. Onde riceve sviluppo non soltanto la prospettiva sì anche lo studio del corpo umano e quindi l'anatomia.

Come già abbiamo accennato, gli artisti di quel secolo e del secolo successivo — da LORENZO GHIBERTI a PAOLO UCCELLO, a LEONARDO DA VINCI, a ALBERTO DÜRER — s'innalzano così dall'opera d'arte alla ricerca della « divina proporzione », contemplando in essa la bellezza eterna e la verità universale.

La stilizzazione della pittura e dell'architettura, secondo i precetti di VITRUVIO, viene descritta ed analizzata in maniera profonda e suggestiva da Leonardo Olschki, che spiega altresì l'influenza dello spirito matematico sullo sviluppo della lingua e della prosa, in particolare nella letteratura francese, fino a Voltaire e al rifiorire dei motivi classici, di là della reazione romantica, in alcuni poeti contemporanei come PAUL VALÉRY [1].

---

[1] L. OLSCHKI, *Der geometrische Geist in Literatur und Kunst.* « Deutsche Vierteljahrschrift für Literaturwissenschaft und Geistesgeschichte », VIII, 3.

Capitolo VI.

MATEMATICHE E STORIA

43. - L'ideale della conoscenza matematica

Supponiamo che lo sforzo della ricerca scientifica sia riuscito a costruire una teoria universale di tipo matematico, come quella che vedemmo essere vagheggiata da Laplace. Tutti i rapporti fra i dati fenomenici si trovano compresi in un sistema di equazioni che possiamo designare come *equazioni dell'Universo*; nelle quali il matematico sa leggere tutte le leggi che compongono l'armonia della Natura, ed anche gli eventi particolari del passato e del futuro che si producono in questa o quella parte del mondo, in funzione dei valori assunti (in un certo momento e in un certo luogo) dai cosidetti *dati iniziali*.

Il matematico che ha conseguito questo sapere infinito e perfetto si trova tuttavia in una posizione d'indifferenza rispetto al *nostro mondo*: la sua scienza appartiene egualmente ad un abitante della Terra, come ad un cittadino di Sirio. Ciascuno dei due possiede lo stesso quadro della realtà, le stesse equazioni, le stesse leggi, e tante tavole di valori che danno i dati iniziali per le varie località: la Tavola della Terra e quella di Sirio. Queste tavole di per sè non dicono nulla di ciò che fa il valore o il disvalore degli eventi rappresentati e calcolabili: le gioie, i dolori, le speranze, i terrori, le miserie e le glorie della nostra vita, le condizioni dell'ambiente in cui essa si svolge, ecc.

Per avere gustato il frutto della scienza divina, l'uomo ha quasi l'impressione di aver perduto la sua umanità. Diceva Epicuro: che importa di conoscere in qual modo precisamente si produca un certo ordine di fenomeni possibili,

se tutti si avverano più qua o più là nell'infinito del Tutto? Un senso affatto simile di disinteresse rispetto a questo modo di conoscere, rischia di soffocare l'entusiasmo del matematico che ha costruito le equazioni dell'Universo. Egli sentirà il bisogno di rifarsi uomo, rivolgendo gli occhi dalle infinite armonie delle cose lontane, per comprendere le vicine, non più nel loro significato astratto di « cose possibili », bensì come « cose reali » che formano per lui e in rapporto a lui stesso una scala di valori: in una parola chiederà di colorire il quadro della « scienza universale » o soltanto un angolo, il *suo* angolo, di questo quadro per vederlo — non più come verità eterna nella sua astrattezza — ma concretamente come storia.

44. - Determinismo e caso nella storia

Ci siamo alzati sulle ali della fantasia a sognare una scienza divina, espressione ideale della Verità matematica; e a quest'altezza ci hanno colto le vertigini, facendoci sentire il bisogno di un sapere concreto e particolare più vicino alla nostra condizione di uomini, collocati in un angolo ristretto dello spazio e del tempo. Che dire ora se la scienza che in effetto ci è dato possedere, o anche soltanto sforzarci di raggiungere. resti sempre infinitamente lontana da quell'ideale di perfezione?

Quando pure avessimo scritto le equazioni dell'Universo, chi non vede che i dati iniziali, forniti da misure, non potrebbero mai essere conosciuti con assoluta esattezza? E la conoscenza approssimata non supplisce più alla previsione degli eventi storici: un piccolo divario rischia infatti di sconvolgere l'ordine della storia.

Poniamo, per esempio, di possedere fra i nostri dati quanto occorre per prevedere che una certa tegola cadrà da un tetto sulla strada, in un certo momento. Essa cadrà certo, qualche decimetro più qua o più là, in un istante determinato a meno di una frazione di minuto. Ma questa piccola incertezza della previsione non sarà indifferente, se da essa dipenda il cadere della tegola sulla testa di Napoleone traversante la strada,

e quindi la morte anticipata dell'uomo fatale che ha avuto tanta parte nella storia del mondo. Gli eventi della storia, notava A. COURNOT, non si lasciano spiegare secondo un ordine di cause storiche, rigidamente concatenate, poichè spesso resultano dall'interferire di serie causali diverse che danno all'evento il carattere del *caso*. Il caso, che è semplice concomitanza nel determinismo universale, sussiste pure come *imprevedibilità* rispetto ad una scienza umana comunque approssimata.

45. - STORIA NATURALE

Facciamo un altro passo nella critica della nostra scienza razionale. Non possiamo lusingarci di determinare veramente le « equazioni dell'Universo ». Quelle che ci sarà dato di possedere, esprimeranno verosimilmente un tessuto di leggi naturali, idealmente semplificate, rispondendo dunque ad una figurazione approssimativa della realtà: invarianti nel flusso delle cose mobili, che sono soltanto tali a prescindere da influenze più lontane. Ma un piccolissimo errore nelle leggi newtoniane del moto, basterà a rendere impossibili le previsioni sulla stabilità del sistema planetario, istituite per milioni di secoli.

Da questa visione resulta anche più gravemente compromessa la possibilità di prevedere i particolari concreti, che rispondono agl'interessi della nostra vita. Di quanto si abbassa il valore della scienza razionale, che ha dovuto dimettere le sue pretese alla verità assoluta ed universale, di tanto s'innalza agli occhi umani quel modo di conoscere la realtà che è insieme rappresentazione concreta dei fatti secondo la loro importanza e valutazione delle cose nei riguardi dell'uomo, cioè: *la conoscenza storica*.

Di fatto alla filosofia matematica e all'ideale scientifico che essa esprime, si vede contrapporsi questo ideale del sapere; e già nello studio dell'ambiente che ci circonda, prima di elevarsi alla sfera propria dell'uomo si affaccia — come antitesi alla *scienza* matematica della natura — l'idea della *storia naturale*.

Aristotele rimprovera ai Pitagorici e a Democrito il loro astratto matematismo, e vuol darci appunto una rappresentazione delle forme della natura, composta in una serie di gradi: una scienza di cui pur oggi è stato detto che, meglio della scienza matematica, è atta a recarci la *saggezza*.

Il significato della storia naturale è stato riconosciuto anche dai moderni. BUFFON, che pure professava una filosofia meccanicistica, ne spiega il concetto nella prefazione del suo libro « *Les époques de la nature* »:

« Comme dans l'histoire civile, on consulte les titres, on recherche les médailles, on déchiffre les inscriptions antiques...; da même dans l'histoire naturelle, il faut fouiller les archives du monde, tirer des entrailles de la terre les vieux monuments, recueillir leurs débuts, et rassembler en un corps de preuves tous les indices des changements physiques qui peuvent nous faire remonter aux differents ages de la nature. » ... l'histoire civile bornée d'un côté par les ténèbres d'un temps assez voisin du nôtre, ne s'étend de l'autre qu'aux petites portions de terre qu'ont occupées successivement des peuples soigneux de leur mémoire; au lieu que l'histoire naturelle embrasse également tous les espaces, tous les temps, et n'a d'autres limites que celles de l'univers ».

In tempi più recenti A. HUMBOLDT disegna il quadro della sua ricerca nel *Kosmos*:

« In questo saggio sulla fisica del mondo non è affatto questione di ridurre l'insieme dei fenomeni sensibili a un piccol numero di principii astratti e razionali. La fisica del mondo, come io intendo esporla... è una *geografia fisica* riunita a una *descrizione degli spazi celesti* e dei corpi che li riempiono... L'unità ch'io mi sforzo di scoprire nello sviluppo dei grandi fenomeni dell'universo è quella delle composizioni storiche. Tutto ciò che dipende da individualità accidentali, dall'essenza variabile della realtà, sia che si tratti della forma degli esseri o degli aggruppamenti dei corpi, sia che si tratti della lotta dell'uomo contro gli elementi e dei popoli contro i popoli, non può essere razionalmente costruito, cioè dedotto da sole idee ».

Humboldt raccoglieva qualche eredità dagli spiriti del-

l'età romantica, in cui lo sforzo verso la conoscenza storica si esprime col fiorire della metafisica idealistica: la quale, d'altra parte in forza di diversi motivi che vi si associano, è riuscita ad una forte reazione avverso la scienza razionale di tipo matematico.

46. - L'ideale della conoscenza storica

Ma l'opposizione dello storicismo al matematismo si lascia comprendere nel suo proprio significato, se — come prima si è fatto per la scienza matematica — si cerchi di prolungare la nostra storia della realtà in una visione storica assolutamente perfetta. Tutti i dati, tutti i fatti ci stanno davanti agli occhi nel loro ordine di luogo e di tempo, chiaramente compresi nei loro rapporti di connessione causale o d'interdipendenza. In questo quadro quale posto compete alla scienza?

Essa è ridotta, nella sua totalità, allo sforzo del pensiero umano che la costruisce progressivamente, e quindi alle osservazioni ed esperienze realizzate e alle ragioni che le collegano, nonchè ai motivi pratici, economici, estetici, religiosi, ecc. che danno impulso alle ricerche e conferiscono al loro valore umano.

Non vi è scienza fuori di questa realtà: se prima — nella luce dell'astratta matematica — la storia ci appariva come una specie di esemplificazione delle leggi universali della natura, ora al contrario — nella nuova prospettiva, sul terreno di un sapere più concreto — è la scienza stessa che si palesa come un particolare frutto dell'evoluzione dell'umanità, da comprendere subordinatamente alla storia.

47. - Matematismo e storicismo

Ma la verità storica compiuta, che viene supposta nelle considerazioni precedenti, non ci è stata rivelata da un Sinai, colla parola d'Iddio, e pertanto rimane — come la Verità scientifica — termine inaccessibile del nostro sforzo umano.

In questa luce la storia della scienza, a cui domandiamo una comprensione superiore del sapere nel suo divenire, non può essere guadagnata che attraverso l'intelligenza scientifica in atto. Così in generale, per ogni campo, la storia deve essere costruita mercè il ragionamento scientifico che vale a coordinare e valutare le tradizioni, le testimonianze, le fonti, indagando prima la « possibilità » per inferire la « realtà ». In tal guisa l'antitesi scienza — storia si risolve in una collaborazione per riguardo al progresso concreto del nostro sapere.

Su questo punto giova insistere. La mente ingenua, non educata al metodo scientifico, ha accolto dapprima come espressione di fatti i miti e le favole tramandate dal passato, e solo più tardi — ispirandosi al modello della scienza razionale — ha appreso a sceverare, colla critica, la verità dall'errore. Là dove si è toccato a rapporti numerici precisi (per esempio nei computi della cronologia) la critica ha potuto valersi talvolta di criterii matematici (come accade per la determinazione di certe eclissi concomitanti a taluni eventi storici). E soprattutto per quel che riguarda la storia naturale, il criterio scientifico è riuscito ad estendere immensamente la nostra conoscenza del passato.

L'età della Terra viene stimata mediante calcoli sulla salsedine del mare e, più recentemente, dagli orologi che sono costituiti dalle sostanze radioattive; queste stime ci riportano ad un'antichità più remota di ciò che gli uomini non avessero mai immaginato. E molto più indietro ancora, per milioni e milioni di secoli il pensiero degli astronomi viene condotto ad esplorare il passato dell'evoluzione dei mondi....

In queste dottrine affatto recenti, che proseguono ed estendono le speculazioni sull'evoluzione della vita di un Darwin e d'uno Spencer, il contrasto fra la visione scientifica e la visione storica dell'Universo appare decisamente superato.

Quanto alla domanda, che qui può affacciarsi, se — ad ogni modo — la mentalità scientifica del matematico e la mentalità storica presentino qualcosa di irreducibile, basta ricordare che — fuori della cerchia dei romantici — spiriti

di matematici positivi, come A. COMTE ed A. COURNOT, hanno dato impulso alla comprensione storica del sapere. E fra i matematici contemporanei, alcuni — come l'astronomo G. SCHIAPARELLI, P. TANNERY e H. G. ZEUTHEN — hanno lavorato nel campo della storia della scienza, dandoci costruzioni che restano in questo campo, come modelli.

Capitolo VII.

PSICOLOGIA DELLE MATEMATICHE

48. - Mentalità matematica

Per intendere più profondamente il posto che spetta alle Matematiche e ai matematici nella cultura, non si può prescindere dall'esame di alcune questioni psicologiche. Anzitutto, che cosa distingue la mentalità del matematico?

Secondo l'osservazione comune, i ragazzi che, alla scuola, mostrano un certo talento per le matematiche non sono sempre i più intelligenti; ve ne sono di timidi e impacciati, chiusi in se stessi, che a nulla s'interessano fuori dei loro calcoli o delle loro figure. Allora i compagni richiamano volentieri l'antico adagio « *mathematicus purus, purus asinus* ». In sostanza il giudizio si può far risalire ad Aristotele [1]: « un uomo stupido — dice egli — può eccellere nella geometria, come accadde ad Ippocrate di Chio, che — dapprima commerciante, per goffaggine e stoltezza perse il suo danaro, facendosi frodare dai ricevitori della dogana di Bisanzio ».

Questa tendenza a scorgere nella matematica una facoltà indipendente dalle altre attitudini dell'intelletto (e così nella nostra scienza un compartimento isolato come la musica), viene avvalorata dal rilevare qualità brillanti d'ingegno in uomini che si riconoscono e professano incapaci di comprendere la più semplice verità matematica, la dimostrazione di un teorema o di una formula affatto elementare. Ma i giudizii della comune opinione su questo soggetto non possono accettarsi senza critica.

---

[1] *Mor. Eudem.*, VII, 14 (5).

Anzitutto quei ragazzi che, come si è detto, appaiono dotati di un esclusivo talento matematico e negati per ogni altro studio non credo che sieno mai riusciti matematici di qualche valore. Se si guarda agli esempî più conosciuti, l'ingegno matematico un po' alto, potrà sì presentare delle lacune e talvolta degli aspetti bizzarri, ma richiede una somma di doti che conferiscono a chi le possiede una larga versatilità, anzi la potenza di approfondire i più diversi campi dello scibile. Non abbiamo testimonianze per verificare o modificare ciò che Aristotele dice di Ippocrate di Chio (sebbene la distrazione o la goffaggine di chi si lascia frodare riveli un difetto d'intelligenza pratica piuttostochè una non intelligenza in generale), ma fra i matematici celebri della storia troviamo taluni degli ingegni più eccelsi dell'umanità: uomini che non solo riescono a dominare altri rami della scienza teorica o emergono nel possesso di una tecnica, ma sono ad un tempo filosofi o giuristi o medici o artisti o scrittori di stile meraviglioso, come Galileo e B. Pascal, talvolta anche poeti.

Le attitudini pratiche si trovano disegualmente ripartite fra i matematici. Nell'antichità molti ebbero uffici politici nella loro città, come Archita di Taranto, che fu sette volte stratega e capo del governo dei Tarantini. Napoleone, che apprezzava le matematiche e diceva che « lo studio di esse è strettamente congiunto colla prosperità dello Stato », ebbe a chiamare al governo Simone Laplace, ma dopo pochi giorni rinviava il suo ministro con questa annotazione: « cet homme portait dans les affaires publiques l'esprit des infiniment petits ». Però non dovevano affogarsi egualmente nelle minuzie Gaspard Monge e Lazare Carnot. Il primo è il creatore della scuola politecnica di Parigi, ispirata al più alto senso pratico, che ha dato alla Francia i suoi strateghi e alcuni dei suoi più celebri matematici, un organismo di studi che segna ancora la sua impronta sulla formazione spirituale dell'intero paese. L'altro, il fiero giacobino della Convenzione Nazionale, è « l'organizzatore della vittoria », che nelle ore più tragiche della Rivoluzione francese, ha salvato la patria dall'assalto di fuori.

Anche l'ostentata incomprensione totale delle matematiche da parte di uomini intelligenti deve essere messa in dubbio. Nel maggior numero dei casi si tratta di un'antipatia che fa rifuggire da questo studio giovani di cui non si è saputo destare l'interesse; e la responsabilità tocca all'insegnante. Si proponga a qualcuno che sia ignaro di geometria di raddoppiare il quadrato: verosimilmente questi, come lo schiavo del « Menone » platonico, sarà indotto dapprima a raddoppiare il lato; un senso di falsa analogia lo trae nell'errore. Ma dovrà correggersi tostochè gli sia mostrata la figura del quadrato di lato doppio, decomposta in quattro quadrati di lato unità. In modo simile acquisterà agevolmente l'intelligenza del significato geometrico della formula

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Però, se questa formula gli venga presentata come espressione astratta di un calcolo algebrico, dobbiamo aspettarci che essa sollevi le sue repugnanze: occorre invero spiegare con cura al principiante che cosa voglion dire i simboli a e b, cioè come essi vanno rimpiazzati con numeri arbitrarii, e poi fargli vedere e toccar con mano la legge distributiva del prodotto rispetto alla somma. Infine la detta formula, per essere compresa ed accolta, esige una non tanto breve preparazione dell'allievo, fatta con senso pedagogico; in mancanza di questa, se essa venga comunicata da un semplice ripetitore, come una regoletta meccanica, solleverà ribellioni non del tutto ingiustificate, quali sorgono naturalmente nel nostro spirito, avverso l'uso di una lingua straniera non conosciuta.

Resta, ad ogni modo, un piccolo numero di spiriti più radicalmente repugnanti dalla disciplina logica della deduzione matematica, che sono affatto incapaci di seguire un ragionamento astratto o d'inibire i movimenti effettivi delle associazioni psicologiche, tenendo fermo all'astrazione stessa. Sono quelli che nell'*Homo oeconomicus* di Adamo Smith veggono non già il tipo dei rapporti economici, ma un mostro privo dei sentimenti più umani di « padre » o di « fratello »

o di « cittadino », da mettere al bando dell'umanità. Ovvero quelli che nell'ipotesi donde prende le mosse un ragionamento di riduzione all'assurdo, scorgono una « concessione » che si faccia all'avversario. Sono uomini, inetti ad ogni lavoro propriamente scientifico, cui manca la facoltà elementare della logica, nel senso stretto della parola, minorati i quali non hanno certo da vantarsi della loro deficienza. Con che non si esclude tuttavia, che fra di essi appaiano tipi d'eccezione, traenti forza dalla loro stessa indisciplinata affettività, che conferisce talvolta alla loro arte o alla loro personalità, nei rapporti cogli altri uomini. Vi sono perfino, in questa categoria dei genii filosofici, come Hegel (così povero intelletto, nel senso stretto della parola da lui stesso definita!), ma di ciò non si ha da far meraviglia; perchè i filosofi non debbono venir figurati come una specie di santi del pensiero, esempio del ben ragionare, anzi come rappresentanti di diversi atteggiamenti dello spirito, che talvolta sono chiamati ad esprimere nella loro purezza, anche nelle forme del paradosso: allora non l'equilibrio delle diverse facoltà, bensì il risalto caratteristico dato ad alcuni motivi, e quindi l'aspetto unilaterale della mente, per cui influiscono sulle idee correnti, conferisce loro una particolare importanza storica.

La grandezza di questi uomini non toglie, in ogni caso, al giudizio su ciò che manca alla loro intelligenza: nell'ordine fisiologico vi sono del pari mancanze, che, in circostanze speciali, si accompagnano a vistosi compensi; ma per ciò non sono meno effettive mancanze.

Fra gli spiriti così negati alla comprensione scientifica si può ricordare il grande storico romantico Carlyle, il quale trovava ridicolo che taluno possa occuparsi della velocità di spostamento di un ghiacciaio. C. Darwin, che era legato con lui attraverso l'amicizia del fratello Erasmo, diceva: « Per quanto posso giudicarne, non ho mai incontrato un uomo, il cui spirito sia così poco adatto alle ricerche scientifiche » e aggiungeva: « Le sue descrizioni sono vive: sono anche esatte? ».

Come accade di solito nelle cose umane, ciò che è capace

di suscitare i più grandi entusiasmi attira naturalmente anche l'odio e il disprezzo di coloro che non sanno comprenderne il valore; perciò non stupisce il giudizio sfavorevole che sulle matematiche e sulla scienza in genere hanno dato alcuni poeti:

« L'arido vero che dei vati è tomba » (Monti).

« L'enseignement mathématique fait l'homme machine et dégrade la pensée. L'âme d'un peuple n'est pas ce chiffre muet et mort à l'aide duquel il compte des quantités et mésure des étendues: la toise et le compas en font autant » (Lamartine).

« Défiez vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géométrie » (Fénelon).

Owen, filosofo della natura, voleva fare una sottospecie umana dell'« homo mathematicus ».

Per contro, Sully Prudhomme così decanta la felicità dei geometri: « Oh, produire l'indiscutable beauté, comme celle d'un théorème démontré avec une simplicité ingénieuse, avec élégance en un mot, et d'une si haute portée que la prédiction des mouvements célestes en dépende! Vous est-il permis, à vous autres artistes, à vous surtout poètes, de goûter jamais le tranquille orgueil d'une création pareille? ».

49. - Logica e intuizione. Analisi e sintesi.

Per chiarire l'essenza della mentalità matematica giova distinguere i gradi ascendenti che essa percorre. Anzitutto: semplice intelligenza discorsiva e facoltà elementare di astrazione, cioè logica strettamente intesa.

Il possesso di questa è una condizione necessaria per il lavoro del matematico, ma non fa ancora il matematico. Essa conferisce alla mente piuttosto che l'arte, soltanto, « lo fren dell'arte ».

La facoltà che viene in opera nella costruzione della scienza e che esprime perciò il reale potere dello spirito matematico è l'intuizione. Chiunque abbia la minima disposizione speciale a questi studi la rivela con l'interesse appassionato per i numeri o per le figure. Davanti ad un problema egli

ha la rivelazione del suo talento o del suo genio, che porta una intuizione *sui generis*, da paragonarsi alla poesia o alla musica. Poeta o musico o matematico, nel significato più alto della parola, si nasce, non si diviene; ma l'educazione vale a svolgere notevolmente e a disciplinare, nel senso più utile, la nativa attitudine.

Non si deve confondere l'intuizione matematica coll'abilità dei calcolatori, che eseguiscono a memoria i calcoli più laboriosi. Questa è un'attitudine d'ordine assolutamente inferiore, che taluno ritiene di trovare anche nei cavalli di Elberfeld. La maggior parte dei matematici non ha per il calcolo numerico alcuna disposizione particolare, sebbene essa s'incontri in qualcuno, come A. Cauchy, che riuscì a superare in una gara il calcolatore Mondeux, usando tuttavia di formule ignote al suo competitore.

Vi sono del resto più forme d'intuizione. La prima è l'intuizione o immaginazione del visivo. È, in certo senso, elementare, e trova impiego altrettanto bene nella ricerca scientifica propriamente detta come nella tecnica. Ma c'è poi un'altra forma d'intuizione più astratta, quella — per esempio — che consente al geometra di vedere cogli occhi dello spirito negli spazi a più dimensioni. E c'è ancora un senso delle analogie formali che, presso molti analisti rimpiazza la rappresentazione visiva delle cose: il geniale artificio di calcolo e — in genere — l'abile trattamento delle formule, si collegano al possesso di questa dote.

Senonchè l'intuizione stessa si prolunga e si supera nel potere unificatore della ragione che non è qualcosa di esclusivo del matematico, ma — in ogni campo della scienza o della pratica — contrassegna la maggiore altezza dello spirito: è — come già si è avuto occasione di dire — la facoltà per cui apprendiamo a comparare le diverse nozioni valutando gli elementi che le compongono, e a raccoglierle in un giudizio sintetico.

In sostanza le doti dell'intelligenza matematica non differiscono qualitativamente da quelle che si dispiegano negli altri lavori scientifici d'ordine teorico; la possibilità di affinarle in un campo particolare — come si esige appunto dal

matematico — non esclude, anzi implica, la possibilità di coltivarla e renderne più proficuo l'uso anche in altri campi. Soltanto dall'averle affinate in modo un po' esclusivo può derivare correlativamente qualche difetto, così come un'educazione ginnastica unilaterale può rendere ipertrofici taluni muscoli e organi a danno di altri. Quindi, meglio che parlare di difetti inerenti alla costituzione mentale del matematico, si può parlare di deformazioni professionali che traggono origine dall'esercizio non contemperato della sua attività.

50. - Difetti professionali

Fra i difetti che tengono allo sforzo del matematico verso l'astratto, è da segnalare anzitutto la *distrazione*. Il ritratto che Platone ci dà dell'astronomo che, guardando al cielo, non vede la Terra ai suoi piedi e cade miseramente nel pozzo, conviene a più d'uno.

Di Archimede racconta Plutarco che « senza posa attratto dalla geometria, come da sirena domestica, dimenticava di bere e di mangiare, e trascurava la sua persona; portato talvolta di peso dai familiari al bagno o alla stufa, disegnava figure nella cenere oppure sul proprio corpo unto d'olio tracciava linee col dito: a tal punto lo possedeva il furor delle muse ». Proprio alla sua distrazione dovette il grande di essere ucciso da un soldato romano che non lo riconobbe dopo l'espugnazione della sua città, Siracusa, da lui difesa colla invenzione dei più svariati ordigni di guerra. Marcello aveva dato ordine di rispettare il patriotta di genio, ma questi — intento a descriver figure sulla sabbia — non rispose a tempo all'ingiunzione rivoltagli. È anche rimasto celebre l'aneddoto che si riferisce al problema della corona del re: il siracusano — avendo scoperto il principio dell'equilibrio idrostatico mentre su di esso meditava nel bagno — sarebbe uscito fuori ignudo, gridando: « εὕρεκα, εὕρεκα » (ho trovato!).

Aneddoti similmente divertenti si raccontano pure di molti matematici moderni. Newton, volendo cuocere un uovo nel giusto tempo, butta nell'acqua bollente l'orologio e

aspetta coll'uovo in mano. Un'altra volta avendo a cena un amico nella stanza di una torre ove viene preparato per due, dimentica la cosa; dopo lunga attesa l'amico si decide a mangiare la sua porzione e se ne va; più tardi Newton, lasciato il suo studio sale alla stanza suddetta, ma trovando in parte già consumata la cena se ne ritorna via: « è strano — dice — non mi ricordavo di aver cenato! ».

Molte distrazioni si raccontano anche di Ampère.

H. Poincaré, passeggiando per le vie di Parigi, si accorge, un giorno, di tenere nelle mani una gabbia d'uccelli: come mai? Torna indietro e, ad un angolo di strada, vede un banco su cui erano esposte appunto tante gabbie simili: l'accademico francese, inseguendo chi sa quale chimera, si era fermato davanti al banco e ne aveva portata via una.

C'è, in questi casi, un difetto passeggero: fenomeno correlativo all'attenzione intensa che taluno concentri sopra un'idea. Lo sforzo abituale di approfondire i particolari minuti della dimostrazione, quando non sia corretto da una visione superiore dei concetti e dei problemi, produce spesso una deformazione professionale di carattere più permanente: l'abito a sopravalutare i particolari minuti delle questioni, a scapito della veduta d'insieme. È il difetto che G. B. Vico rimproverava ai matematici e alle matematiche colla frase famosa che « alle menti già dalla metafisica fatte universali, riesce difficile questo studio proprio degli ingegni minuti ».

All'opinione così espressa da un filosofo si può opporre il giudizio d'un uomo di finanza. Si racconta che Rothschild, dopo aver respinto un tale che gli chiedeva di essere occupato nella sua banca, lo richiamasse poi e si arrendesse al suo desiderio, per averlo veduto chinarsi a raccogliere uno spillo. « Chi ha cura delle piccole cose — avrebbe detto — è meglio preparato anche ai più grandi affari ».

In realtà tener conto di particolari minuti vuol dire spesso assicurarsi una ragion di successo in confronto a coloro che procedono in modo più grossolano. Ma il punto è di comprendere l'ordine di grandezza delle cause che entrano in giuoco e dei loro effetti, e di proporzionare l'accuratezza all'approssimazione che si può presumere di raggiungere. Ec-

cedere, oltre questo limite, nella minuzia, e peggio perder di vista il più grande per il piccolo, costituisce un errore che è talvolta sul cammino della verità, e che il matematico, ed in ispecie il fisico-matematico, apprende di buon'ora a correggere, valutando le sue approssimazioni: c'è qui un compito alquanto difficile, che egli ha dovuto apprendere nella storia. Roberval pare ritenesse di perfezionare la dottrina di Galileo dei gravi cadenti sul piano inclinato, tenendo conto che le forze di gravità che agiscono sui punti del corpo non sono esattamente parallele ma concorrono nel centro della Terra: questo è un rigore affatto fuor di luogo, per riguardo all'ordine di approssimazione delle nostre conoscenze. Per contro Huygens, aveva ragione di correggere la legge (galileiana) di isocronismo delle oscillazioni del pendolo, che vale soltanto per oscillazioni abbastanza piccole, rilevando che la proprietà di essere tautocrona spetta, non già alla curva del cerchio, bensì alla cicloide.

In ogni modo non si può rimproverare al microscopio di vedere nel piccolo più in là del semplice occhio disarmato di lente. Non è un difetto dell'aritmetica di fornire regole per il calcolo delle radici con più cifre decimali esatte; ma soltanto lo stordito spingerà avanti questo calcolo, per esempio fino alla settima decimale, laddove si tratta di misure conosciute soltanto coll'approssimazione della seconda cifra. Questo genere di storditezza rivela un aspetto debole della ragione umana, che si lascia meno scorgere nell'uso più ordinario e grossolano di essa. Ma è, in qualche modo, lo scotto pagato per il raffinamento delle facoltà del pensiero, e non costituisce specificatamente un difetto del matematico. L'arte di spaccare un capello in quattro si attribuisce piuttosto ai metafisici. Ed anche fra i cultori di altre discipline, avviene di trovare l'abito a dar troppo peso alle minuzie: per esempio, nello studio della storia della scienza o della filosofia, vi sono filologi che tormentano i testi dossografici, sottilizzando sulle interpretazioni che meglio vanno saggiate secondo un metodo razionale di critica, coll'intelligenza chiara del senso delle idee che si tratta di spiegare.

Il difetto della sottigliezza si può complicare con l'abito

morale di volersi dar ragione per forza, e si esprime allora colla dialettica *sofistica*. I matematici, per essere maggiormente esercitati nella critica, eccellono talvolta in questo brutto atteggiamento; ma di regola in loro è più capacità che volontà del peccato; in generale il culto disinteressato della verità matematica tende piuttosto ad allontanarcene. Assai più dialettica speciosa si trova invere nelle polemiche appassionate dei filosofi e nella pratica di certi avvocati (non dei giuristi, come si crede dal volgo).

Possiamo riassumere questa discussione insistendo che talune deformazioni professionali non sono difetti costitutivi della mente matematica, ma piuttosto effetti di una educazione troppo unilaterale ed esclusiva di essa. Lo studio delle matematiche, all'infuori dell'utilità che può recare ai cultori di ogni ramo della scienza o della tecnica, possiede certo un alto valore formativo dell'intelligenza; come diceva Pascal, « entre esprits égaux, et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle ». Ma, sviluppando smisuratamente certe attitudini del pensiero, codesto studio deve essere opportunamente accompagnato da altri che conferiscono insieme alla formazione dell'intelligenza più armonica; in ispecie dagli studi umanistici, di cui deve ritenersi come parte integrante. Mercè i quali si riesce veramente a educare quello che lo stesso Pascal designava come « esprit de finesse » in contrapposto allo « esprit géométrique » strettamente inteso.

L'umanismo include, in ogni caso, la mentalità storica, che — come abbiam visto — deve comporsi colla mentalità scientifico-matematica universalistica, per una migliore aderenza ai varii aspetti della realtà.

51. - Diverse attitudini del pensiero matematico

Abbiamo già accennato a diverse forme d'intuizione che si trovano presso i matematici, le quali sono in qualche rapporto coi diversi indirizzi della scienza: al senso del simbolismo e delle analogie formali, traverso a cui taluni indovinano spesso le verità più riposte, e alla rappresentazione im-

maginativa, che va dalla visione concreta a maniere più astratte. Ma giova dire che l'abilità algoritmica e il senso del simbolismo possono bene associarsi ad alte doti visive o immaginative, siccome accade in alcuni dei grandi matematici. I due diversi atteggiamenti mentali solo in parte corrispondono ai campi di studio, del resto strettamente connessi, che si designano come « Analisi » e « Geometria ». Se i sintetici intuitivi si vogliono ritenere come « geometri », bisogna attribuire a questa classe alcuni fra i maggiori che han fatto progredire l'analisi (per esempio la teoria delle funzioni o dei gruppi, ecc.), quali Bernardo Riemann, Sophus Lie, e Henry Poincaré.

Il tentativo di collegare le diverse attitudini dello spirito matematico con altre disposizioni, per esempio alla pittura o alla musica, non sembra che conduca a nessuna conclusione certa. In particolare i matematici danno luogo ai casi più estremi in quanto all'orecchio, e non pare che vi sia un nesso fra il comportamento musicale e gli aspetti della loro mentalità scientifica.

I popoli della cultura europea contribuiscono egualmente ai progressi delle matematiche; se in qualche nazione minore esse sono rimaste permanentemente ad un livello più basso. ciò sembra indicare un grado meno elevato della civiltà in genere e specie dello sviluppo intellettuale. Ma è difficile dire se questo tenga propriamente a caratteri di razza ovvero alle circostanze dell'ambiente. Perchè anche in grandi paesi come l'Italia, dopo la straordinaria fioritura degli algebristi del Cinquecento e poi della scuola di Galileo, si assiste ad un temporaneo — e sia pur relativo — abbassamento, da cui il nostro paese non si rileverà che all'epoca del Risorgimento: nel frattempo i matematici italiani hanno perduto soprattutto il contatto colle grandi correnti del pensiero europeo, che innanzi avevano diretto, e solo portandosi in altro ambiente di cultura, come il piemontese Lagrange a Parigi, riescono di nuovo ad affermare l'universalità del loro genio.

Un elemento etnico appare da ciò che il talento, e talvolta il genio matematico sono ereditarii, come si vede nell'esempio storico caratteristico della famiglia Bernoulli. Ma il ten-

tativo di collegare a differenze nazionali i diversi atteggiamenti dello spirito matematico e quindi i diversi indirizzi della scienza, non sembra affatto riuscito. Infatti le scuole matematiche si prolungano fuori dei limiti delle nazioni e il prevalere dell'una o dell'altra tendenza in un dato paese non ha affatto carattere permanente. Nell'epoca più vicina a noi, si vede in Germania coltivata più che altrove l'aritmetica superiore (teoria dei numeri), in Francia la teoria qualitativa delle funzioni, in Italia la geometria. Ma lo studio delle funzioni di variabile complessa, iniziato col secolo XIX dal francese Cauchy, era passato poi in Germania nelle scuole di Riemann e di Weierstrass, e la geometria ebbe la sua fioritura in Francia e in Germania, prima di trovare il suo maggior centro nella scuola italiana di Luigi Cremona.

Nemmeno si può riconoscere alcuna differenza caratteristica nell'opera dei matematici ebrei, che confluisce nelle diverse correnti nazionali: vi sono tra loro mentalità affatto diverse, più o meno intuitive o logiche o filosofiche. Ed anche della produzione scientifica più remota dei paesi fuori d'Europa si può dire qualcosa di simile.

Insomma, se la maniera di lavoro — i tentativi, gli errori, la forma dell'esposizione — possono esprimere una psicologia legata a qualche carattere etnico, la posizione dei problemi e il significato dei resultati, si libera dalle differenze contingenti e particolari per esprimere la ragione umana ed universale.

Invero i progressi delle matematiche non dipendono soltanto dallo sforzo della ricerca individuale, sì anche dai rapporti dei ricercatori fra loro e coll'ambiente di cultura da cui traggono origine. Per bene comprendere questo insegnamento della storia, conviene rilevare l'importanza che ha nella formazione del matematico la *scuola*. Il culto tradizionale del rigore dimostrativo fa sì che soltanto una parte delle idee dei matematici, la parte più compiuta ed elaborata, passi nelle loro opere scritte. Le esperienze e le suggestioni che si legano a tentativi non riusciti o a resultati e problemi appena intravisti, tanti criterii di ricerca che non sono formulati in maniera astratta, si comunicano soltanto a voce,

nell'intimità delle conversazioni fra colleghi ed amici o meglio fra maestro e scolaro. Lo scolaro riprende e continua il pensiero del maestro anche quando più o meno consapevolmente lo ricrea in una nuova forma: talvolta accade perfino ch'ei presenti come correzione o rinnovamento ciò che esprime invece una interpretazione più vicina al motivo originale delle idee ricevute.

Nella continuità della storia i matematici, a volta a volta successivamente scolari e maestri, offrono lo spettacolo di una ragione universale che elabora la verità eterna, sopra alle differenze e alle debolezze degli uomini. La scuola tende ad allargarsi fuori del proprio ambiente d'origine, ed allora l'influenza sullo scolaro viene a comporsi con altri motivi diversi che la fecondano. Perciò si avvera la legge di avvicinamento che Klein ha messo in luce, cioè che lo sviluppo delle scuole matematiche, soggetto ad alternanze di progresso e di decadenza nei limiti di una nazione, si ravviva passando da una nazione ad un'altra, quasi a far partecipare più largamente all'opera comune lo spirito del mondo.

52. - La scoperta

Diceva Cicerone, nel *De Oratore,* che per Democrito e Platone « poetam bonum neminem sine inflammatione animorum existere posse et sine quodam adflatu quasi furoris ». Questo è vero anche per quei poeti che sono i matematici, quando si guardi veramente alla loro opera creativa, anzichè allo sviluppo tecnico che posson recare a dottrine conosciute. Non è poeta il ragioniere che allinea le cifre combinandole secondo le leggi dell'aritmetica; e nemmeno colui che impiega i mezzi noti, forniti per esempio dalle equazioni di secondo grado, per risolvere un problema nell'ambito della scienza fatta. Ma nemmeno è poeta il versificatore, che si vale semplicemente delle regole scritte nei trattatelli di metrica o dei rimarii. La vera ricerca — sforzo di creazione poetica — è quella in cui la domanda si affaccia come nuova, senza che sia segnata la via della risposta. Allora lo studioso chiede ansiosamente un idea che valga ad avvicinare l'ignoto al già

noto; cerca talora per giorni, o, a ripetuti intervalli, per mesi e per anni, come il credente che invoca nel suo animo la rivelazione, che si fa dolorosamente aspettare, della presenza divina; finchè venga l'ora in cui l'idea si palesa, spesso ad un tratto, luce sfolgorante o lumicino acceso nella notte che incoraggia ad avanzare di un passo, e promette vicina una luce più grande. È il momento della grazia, in cui lo scopritore apre l'animo alla gioia pura.

Tutti i matematici che hanno descritto il cammino delle loro scoperte parlano un linguaggio simile. Dice Jacobi: « Crescunt disciplinae lentae tardeque; per varios errores sero pervenitur ad veritatem. Omnia preparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae. Iam illa certo temporis momento divina quadam necessitate coacta emerget ».

Perciò il racconto che alcuni ci danno delle loro scoperte, per esempio quello di Henry Poincaré in « Science et méthode », suscita un interesse commovente. Alcune osservazioni invitano anche a riflettere su circostanze paradossali. Accade, per esempio, che la mente ricercatrice, che persegue il suo scopo anche nell'incoscienza del sonno (chi di noi non conosce il sonno turbato sotto l'ossessione del problema oscuro?), si trovi subitamente illuminata al risveglio, come se la verità siasi rivelata in sogno. Accade, del pari, che essa si affacci improvvisa nel momento del divago, quando la mente ha cessato di pensarci.... Questioni che spetta allo psicologo di chiarire.

Il più umile credente ritrova talvolta nella lettura della vita dei santi — nei dubbi, nelle lotte, nelle angosce, nelle lunghe aspettative e nelle confortanti illuminazioni del loro spirito — qualcosa della propria storia. Alla stessa guisa già l'allievo, che ha provato a sciogliere qualche problema di geometria elementare, conosce alcunchè del travaglio e della gioia della scoperta matematica. Anche negli altri campi della scienza e della speculazione, la verità si discopre, dopo un lavoro preparatorio, in forma di luce improvvisa; solo che nella riflessione matematica c'è in generale una tensione maggiore, specie quando la difficoltà si presenti nella forma

del paradosso o della contraddizione, da cui la mente ha bisogno di liberarsi: la gioia subitanea della scoperta che invade l'animo al cessar della pena, risponde allora al ritrovamento che lo spirito fa di se stesso.

Senonchè la rivelazione della verità, come la grazia della fede, non è mai compiuta e definitiva: il momento intuitivo non esaurisce il lavoro scientifico: per il matematico occorre dimostrare la tesi conquistata o divinata, cimentandola con una critica rigorosa. E la dimostrazione logica non riesce soltanto ad assicurare la consistenza della scoperta, ma spesso anche a correggerla. Qui si rivela il significato dell'errore e il nodo che lo lega indissolubilmente alla verità, nella creazione scientifica.

Taluno che ha scritto un libro su «Les erreurs des mathématiciens» è passato accanto ad un grande soggetto di studio senza sospettarlo. Egli sembra muovere dall'idea, comune fra i matematici, di una scienza impeccabile, in cui gli errori sono semplicemente distrazioni dello spirito, da emendare col restituire al loro posto la verità esatta. Invece l'errore — quello che importa di studiare — è sulla via della verità l'aspetto negativo del precorrimento di essa coll'intuizione, e così essenzialmente parte di ogni più elevata conquista scientifica. A chi sogna la fredda perfezione del matematico rigoroso in ogni fase della sua attività, verrebbe voglia di ripetere con Lutero: « pecca forte e fortemente pentiti! ».

Certo vi è una psicologia degli errori, che maggiormente ritrae dalla personalità del lavoratore, e sarebbe assai interessante di farne l'analisi; ma vi sono anche errori storici che appaiono quasi immancabili, come quelli che toccano ad idoli o ad illusioni naturali della mente umana, che si possono riconoscere soltanto prendendoli un momento per buoni, e sforzandosi di approfondirne le conseguenze.

Quanto alla psicologia individuale, trova posto qui la distinzione dei temperamenti classici e romantici di W. Ostwald, ed anche quella fra gli induttivi e i deduttivi: i primi salgono dal particolare al generale muovendo da esempi concreti, e se possono ingannarsi per non sospettare la più grande ricchezza del vero, recano almeno colle loro scoperte qual-

cosa di solido; gli altri, se troppo amanti della generalità astratta e formale, rischiano più gravi capitomboli, quando le loro dimostrazioni lascino la più piccola lacuna.

Lo stesso rigore, che è l'ideale della trattazione matematica, viene inteso in maniere diverse dai detti spiriti. Per gli induttivi il rigore viene guadagnato, o almeno avvicinato nei limiti del possibile, traverso la discussione dei casi più oscuri o difficili che danno luogo al dubbio; altri invece — che di esso professano un'idea assoluta — cercano soprattutto di allontanare ogni responsabilità da se stessi, mediante la più prudente reticenza nelle formule o nelle definizioni: come mostrano coloro che designano, per esempio, la massa o altro carattere fisico un semplice coefficiente, per evitare le critiche che possano muoversi alla definizione del concetto.

53. - L'insegnamento

Abbiamo rilevato il valore delle matematiche in tutti i rami dell'attività scientifica e pratica, nonchè la potenza che esse recano allo spirito. Da ciò sorge l'interesse della società a diffondere largamente il possesso della cultura matematica e ad educare con questa larghi ordini di cittadini.

Qui si affaccia di solito la domanda se all'insegnamento debba darsi piuttosto lo scopo formativo o informativo. Ma il dilemma è mal posto. Se coll'insegnamento informativo si intende di porgere all'allievo una serie di nozioni da accogliere passivamente come un dono, questo non ha ragion d'essere in alcun ordine di scuole, perchè il dono di cosa estrinseca non arricchisce il povero che ne ignora l'uso: il maestro dona soltanto se stesso quando trascina e commuove e comunica qualcosa della propria vita al suo figlio spirituale.

L'acquisto della cultura suppone sempre l'apprendimento dell'uso che possa farsene; il quale esige la partecipazione attiva dell'educato, ed ha un valore formativo. Ma si può convenientemente distinguere usi diversi: così nella scuola classica giova educare i giovani facendo loro rilevare il significato estetico o filosofico delle verità matematiche, e promovendo in essi — fin dove è possibile — l'interesse per la ri-

cerca teorica, per esempio, col proporre la risoluzione di semplici problemi geometrici; laddove nella scuola tecnica si richiamerà opportunamente l'attenzione loro coll'esercitarli in compiti più vicini agli scopi che essi si propongono di raggiungere.

Il valore formativo che le matematiche hanno nell'istruzione classica è stato già messo in luce da Platone, di cui abbiamo citato alcuni passi espressivi.

Al grande filosofo le matematiche debbono il posto che tengono nella tradizione dell'insegnamento.

Ma per rispondere ai fini costitutivi della scuola classica, debbono esse cooperare con altri studi e perciò non straniarsi dai motivi generali della cultura umanistica. Il che potrà opportunamente raggiungersi mercè una veduta storica della scienza, ed anche col rilievo dei motivi matematici nell'insegnamento dell'arte, della letteratura e della filosofia. Per dare un esempio, i celebri argomenti di Zenone d'Elea offrono occasione ad illustrare la scoperta della progressione geometrica.

Il valore formativo delle matematiche si palesa, non soltanto nell'elevamento e nel potenziamento delle intelligenze che, traverso l'istruzione classica, vogliono abilitarsi ai più alti studi, sì anche nei primi gradi dell'educazione dell'infanzia e delle classi popolari; perchè l'intelligenza matematica è assai precoce. Due pedagogisti soprattutto hanno lavorato a portare le conoscenze matematiche nell'educazione del fanciullo, come elemento del suo sviluppo intellettuale: E. Pestalozzi (1746-1827) e F. Fröbel (1782-1852). Il primo ammaestra « come Geltrude insegna ai suoi bambini », indicando loro di buon'ora la consapevolezza dei rapporti di numero e misura, che essi debbono apprendere presto e con chiarezza. Il secondo, già nei suoi primi doni, nei giuochi e negli esercizi dei suoi giardini, offre ai fanciulli la visione delle figure geometriche e delle loro simmetrie, e li interessa ad osservazioni via via più difficili, con una progressione metodica che risponde ad un preciso disegno educativo.

Per le scuole infantili come per le popolari, è soprattutto vero ciò che si osservava innanzi, che l'indirizzo formativo

non si disgiunge dall'utilitario, che crea coll'interesse l'accoglimento delle cose insegnate.

Fino dai tempi del Rinascimento (ed anche prima, col Fibonacci) molto si è fatto per agevolare l'istruzione matematica dei tecnici e dei pittori. Luca Paciolo svolge una geometria d'approssimazione che riprende le antiche costruzioni egizio-babilonesi, basate sull'esagono regolare; Leon Battista Alberti e Piero della Francesca, come si è detto, trattano della prospettiva. C'è tutto uno sviluppo delle matematiche fuori della scuola che è caratteristico del nostro Cinquecento. I pittori e gli architetti — di cui il Vasari ci narra le *Vite* — imparano dalla pratica piuttosto che dalle fonti letterarie classiche ciò che occorre per l'arte loro. E alla stessa fonte attinge anche Leonardo da Vinci. Più tardi questa corrente tecnica del sapere si ricollegherà colla tradizione umanistica, e darà nuovo impulso ad allargare la visione del posto che tocca alle matematiche nella comprensione del mondo. In particolare si può scorgerne un frutto nell'interesse suscitato per la trattazione matematica della meccanica.

Gli sforzi per volgarizzare le matematiche si rinnovano in Francia, nel secolo XVIII, in seguito alla straordinaria importanza che la scienza ha acquistato per la pratica. Questo movimento si esprime col lavoro dei geometri francesi di quell'epoca e degli inizii del secolo XIX, per rendere accessibile a più vasti circoli la geometria che — nella veste dell'Euclide — offre allo studio qualche difficoltà: vi partecipano eminenti autori, da Clairaut a Legendre. Per dare un esempio, A. Clairaut spiega come il volume della piramide sia la terza parte del prisma di egual base ed altezza, col paragone del cubo alle 6 piramidi quadrate in cui viene decomposto per proiezione dal suo centro.

La vasta opera didattica di Legendre, che si estende su mezzo secolo, vuole rammodernare l'Euclide introducendo spesso il linguaggio dell'algebra al posto del linguaggio geometrico; e riesce anche a completare e superare in alcuni punti l'autore greco, specie nella geometria solida. Ma in molti altri punti resta inferiore al modello, per quanto ri-

guarda il rigore, che viene compreso in una maniera meno fine. I trattati del Legendre ebbero, a suo tempo, un'immensa diffusione, tanto in Italia che in Francia. Più tardi però sollevarono delle critiche, soprattutto perchè il metodo seguito tende a meccanizzare il ragionamento, sicchè la geometria viene a perdere valore come mezzo educativo dell'intuizione.

Appunto per questo motivo i geometri che hanno cooperato a restaurare la scuola media in Italia, dopo la fondazione del regno — E. Betti, F. Brioschi e L. Cremona — hanno bandito dalla scuola stessa, e specialmente dall'istituto classico, il Legendre e vi hanno riportato l'Euclide: da principio si adottarono proprio gli *Elementi* del geometra alessandrino, che contemporaneamente conservavano il loro posto tradizionale nelle scuole inglesi; poi si sono scritti in Italia libri che tendono a conservare i pregi del modello greco, perfezionando da un lato il sistema logico e d'altro lato illustrandolo con osservazioni intuitive.

Frattanto però si delineava in altri paesi un movimento, che in Germania ha trovato un propulsore in F. Klein, per l'introduzione di metodi più intuitivi ed empirici, facilitando l'insegnamento della parte elementare classica della geometria e per contro spingendo avanti lo studio più generale delle proprietà che dischiudono la veduta dell'analisi infinitesimale. In Italia l'insegnamento intuitivo si è adottato nei primi anni della scuola come avviamento allo studio razionale, e l'ordine d'idee kleiniano — per quel che concerne un insegnamento più elevato — ha avuto un principio d'attuazione nel programma del liceo moderno e nei libri che per esso furono scritti [1]. Però in generale gli insegnanti italiani — forse per l'educazione logica che ricevono nelle facoltà universitarie — trovano difficoltà ad accogliere questo spirito, cui è insita una certa incompiutezza e un modo di ragionare significativo ma volutamente imperfetto. Così il programma del nuovo liceo scientifico, instaurato colla ri-

---

[1] Amaldi e Enriques, *Nozioni di Matematica*.

forma Gentile, riprende dal liceo moderno taluni argomenti (derivata, integrale), nel senso di un maggiore rigore logico.

Ci limiteremo ad aggiungere che tali questioni didattiche hanno dato luogo a larghi studi e discussioni per opera di una « Commissione internazionale per la riforma dell'insegnamento delle matematiche », istituita nel Congresso dei matematici di Roma, 1908, che ha pubblicato sull'argomento molti volumi, ed ha per organo *L'Enseignement mathématique* di H. Fehr a Ginevra.

Più che le differenze dei metodi o le indicazioni dei programmi influisce sull'efficacia dell'insegnamento il valore degli insegnanti: la loro mentalità, la comunicativa, la passione che portano alle cose insegnate, la larghezza degli interessi che li fa capaci di mettersi al posto degli allievi e di sentire con essi. Nella misura in cui tali doti possono essere acquisite, occorre per ciò curare soprattutto la preparazione universitaria, e poi creare ai docenti condizioni di vita che lascino sufficiente libertà di mantenere e di svolgere la propria cultura.

Le Università italiane, ove le matematiche si trovano ad un alto livello, offrono ai giovani candidati all'insegnamento favorevoli condizioni di studio, sotto la guida di maestri che sono, in generale, valorosi cultori della scienza. Inoltre la disposizione degli studi del primo biennio si è venuta atteggiando in tal modo che i corsi istituzionali hanno ricevuto nel nostro paese uno svolgimento particolarmente curato, dando luogo così a trattati che sono, spesso, modelli di compiuto rigore. Se un difetto può trovarsi talvolta, nei riguardi didattici, è soltanto che l'esposizione perfetta lascia meno allo sforzo dell'allievo, o che il rigore logico nasconde in parte la genesi delle idee. Anche l'esatta formulazione delle restrizioni che si richiedono nell'enunciato dei teoremi, può togliere la veduta della genesi delle idee, e perfino l'intelligenza del loro valore. Per esempio (prendendo motivo qui da un'autocritica) se si enuncia il teorema di Steiner sulla generazione proiettiva delle coniche, parlando di « due fasci di raggi proiettivi, non concentrici nè prospettivi », può accadere che l'allievo, prima di aver colto il senso

del teorema nel caso che costituisce la regola, si fermi proprio sull'eccezione: una eccezione, invero, che se pur fosse taciuta, egli riconoscerebbe assai facilmente e forse vedrebbe implicita in un enunciato meno preciso.

Che dire, dunque? Si deve rifiutare i pregi di una trattazione come doni di cui altri possa fare mal uso? Sarebbe, pare, un po' esagerato. Ma conviene ricordare sempre che il bene e il male, nella scienza come nella vita, hanno qualcosa di relativo. Un trattato che supera sotto alcuni aspetti altre opere precedenti, non le sostituisce in modo che di esse più nulla debba restare.

La geometria proiettiva come disciplina sintetica pura ha toccato un vertice nell'opera dello Staudt e noi stessi abbiamo cercato di esporne il sistema in un trattato che riposa sopra la critica approfondita dei suoi principii. Allora, come correttivo o complemento di questo insegnamento puristico, è sorta l'esigenza di porgere d'altra parte agli allievi, traverso alle esercitazioni, una veduta degli sviluppi che hanno preceduto l'ultimo grado di perfezione della dottrina: e F. Severi (che era a quell'epoca assistente alla cattedra di geometria dell'Università di Bologna) ha realizzato questo disegno in un bel libro, ricco di nozioni storiche e di problemi, che si collega appunto alle nostre « Lezioni » sopra citate [1]. Ci piacerebbe che qualcosa di simile si facesse per esempio anche per l'insegnamento dell'Analisi infinitesimale che, sotto l'influenza dominante di Ulisse Dini, si è venuto conformando sempre meglio ai più alti criteri della logica scientifica. Giacchè, di fronte ai moderni trattati critici, non perde valore ai nostri occhi qualche vecchia esposizione, come si dà nel « Calcolo » di Lacroix, imperfetto quanto si vuole, ma spesso eminentemente suggestivo.

Del resto gli inconvenienti correlativi alla trattazione rigorosa dell'Analisi infinitesimale sono assai conosciuti anche in altri paesi. Così, per esempio, F. Klein si divertiva a parodiare la situazione in cui vengono a trovarsi allievi educati troppo esclusivamente col metodo logico astratto. « Si

---

[1] Cfr. la bibliografia del § 19 nel Libro terzo.

propone ad uno di questi un problema (sia p. es. di massimo o di minimo) ove interviene una funzione algebrica. Il cauto allievo si domanda anzitutto se la funzione data sia continua: dopo un lungo lavoro egli è in grado di dimostrarlo. Ora questa funzione bisognerebbe derivarla; ma sarà derivabile? Basta: nel dubbio, sarà più prudente di estenersi! ».

La formazione di docenti di matematiche che sieno all'altezza dei loro compiti didattici, richiede, in genere, che la scienza sia da loro appresa non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire. E quindi che lo studioso apprenda dalla storia a riflettere sulla genesi delle idee, e d'altro lato partecipi all'interesse per la ricerca. A conseguire il primo scopo, e ad umanizzare la cultura del matematico pare che potranno concorrere speciali *scuole di storia delle scienze,* se l'iniziativa dell'Università di Roma avrà lo sviluppo e il seguito che sembra meritare.

Risvegliare l'interesse dei futuri docenti alla ricerca scientifica e mantenerlo poi vivo in essi, è tanto più difficile perchè i problemi delle alte matematiche sembrano, a prima vista, affatto remoti dal campo degli elementi in cui verrà ad esplicarsi l'attività dell'insegnante di scuola media. Conviene perciò mostrare l'apporto significativo che le matematiche superiori recano in più sensi all'intelligenza dei concetti e alla risoluzione dei problemi elementari. A tale scopo mira la raccolta delle « Questioni riguardanti le matematiche elementari » trattate da diversi collaboratori, raccolte ed ordinate da F. Enriques [1]. Ed il *Periodico di Matematiche,* nella serie che si pubblica a Bologna presso l'editore Zanichelli dal 1922, prosegue questo programma, tendendo ad allargare la cultura generale dei lettori, con articoli di vario interesse e particolarmente storici.

Per ciò che riguarda la storia delle matematiche vogliamo ancora citare la collana dei classici pubblicata sotto gli auspici dell'Istituto nazionale per la storia delle scienze, che reca la traduzione di opere celebri (Euclide, Archimede, Newton, Clairaut, Galileo, Bombelli, Dedekind, ecc.), ac-

---

[1] 3ª ed. in 4 Voll. Bologna, 1924-27.

compagnate da note critiche, le quali valgono a illustrare allo studioso la posizione storica dell'opera stessa. Per esempio gli Elementi d'Euclide, colle note relative alla critica antica e moderna, offrono l'occasione di orientare il lettore nella critica dei testi di geometria, indicandogli come tutti si riattacchino alla fonte comune dell'autore greco.

BIBLIOGRAFIA

Il posto delle Matematiche nel quadro generale delle scienze e nello sviluppo di esse appare in primo luogo dalle storie generali della scienza. Confronta per esempio:

F. Enriques e G. de Santillana, *Storia del pensiero scientifico*. Vol. I: *Il mondo antico*. Bologna, 1932.

F. Enriques e G. de Santillana, *Compendio di storia del pensiero scientifico*. Bologna, 1937.

J. T. Merz, *A history of the European Thought in the 19.th. Century*. 3 volumi: 1896, 1903, 1912. Edimburgo-Londra.

Si vedano altresì le opere scientifico-filosofiche:

H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*. Parigi, 1902. — *La valeur de la science*. Parigi, 1905.

E. Picard, *La science moderne et son état actuel*. Parigi, 1906.

F. Enriques, *Problemi della scienza*. Bologna, 1906 (rist. 2ª ed. 1926).

Più specialmente dedicate ai rapporti fra matematiche e filosofia, e quindi anche alla natura della conoscenza matematica, ecc., sono le opere seguenti:

F. Enriques, *Scienza e razionalismo*. Bologna, 1912. — *Per la storia della Logica: i principii e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici*. Bologna, 1922. — *La théorie de la connaissance scientifique de Kant jusqu'à nos jours*. Parigi, Hermann, 1938.

P. Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*. Parigi, 1920.

L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie des mathématiques*. Parigi, 1912.

O. Hölder, *Anschauung und Denken in der Geometrie*. Lipsia, 1900.

O. Perron, *Wahrheit und Irrtum in der Mathematik*. Rapporto alla Deutsche mathematische Vereinigung, 1911.

A. Voss, *Über die mathematische Erkenntnis*, in « Die Kultur der Gegenwart ». Berlino-Lipsia, 1911. — *Über die Beziehung der Mathematik zur Kultur der Gegenwart*, in « Die Kultur der Gegenwart ». 1934. — *Über das Wesen der Mathematik*. 3ª ed. Lipsia, 1913.

H. E. TIMERDING, *Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematische Auffassung*, in « Die Kultur der Gegenwart », 1914.

TH. JOURDAIN, *The Nature of Mathematics*. 1919.

H. WIELEITNER, *Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwickelung*. Lipsia e Berlino, 1925.

F. GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*. Parigi, 1936.

Per i rapporti fra matematiche e arti si troveranno ampie indicazioni nelle opere seguenti:

L. OLSCHKI, *Die Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften*, nella serie « Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur ». Heidelberg, 1919.

J. v. SCHLOSSER, *Die Kunstliteratur*, trad. italiana « Letteratura artistica ». Firenze, 1936.

Si vedano d'altra parte:

G. BIRKHOFF, *Aestetic Measure*. Cambridge Mass., 1933.

D. E. SMITH, *The Poetry of Mathematics*..., in « Scripta mathematica ». New York, 1934.

Le questioni che concernono la conoscenza scientifico-matematica in confronto alla conoscenza storica trovansi trattate da

W. WINDELBAND, *Geschichte und Naturwissenschaft*. Strasburgo, 1894; 3ª ed. 1907.

W. RICKERT, *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung*. Tubinga, 1896-902.

E. DE MICHELIS, *Il problema delle scienze storiche*. Torino, 1915.

A. NAVILLE, *Classification des sciences*. Parigi, 1920.

F. ENRIQUES, *Naturali scienze*, in « Enciclopedia Italiana ».

Sulla psicologia delle matematiche si hanno indicazioni in scritti varii e specialmente nelle biografie e nei libri che riportano aneddoti sulla vita dei matematici. Cfr:

W. AHRENS, *Scherz und Ernst in der Mathematik*. Lipsia, 1904.

Sull'insegnamento, oltre le fonti citate nel testo:

F. PAHL, *Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts*. Lipsia, 1913.

Libro Terzo

SU ALCUNI INDIRIZZI DELLE MATEMATICHE NEL SECOLO XIX

CAPITOLO I.

PROBLEMI E SVILUPPI DELL'ANALISI QUALITATIVA

1. - L'EVOLUZIONE DELLE MATEMATICHE PURE

Le matematiche pure hanno ricevuto durante il secolo decimonono un grande sviluppo allargandosi in più sensi, così da costituire campi di ricerca differenziati e talvolta perfino inaccessibili agli stessi matematici forniti di una diversa preparazione tecnica. Questi sviluppi rivelano tuttavia una profonda unità, allacciandosi e fondendosi nelle più alte trattazioni dei problemi.

Intanto la disciplina matematica presenta ora un carattere nuovo ed appariscente in confronto al secolo che precede. È stato detto che il secolo decimonono è il secolo delle *matematiche* pure: quei problemi che, nell'epoca anteriore, erano stati posti e coltivati specialmente per corrispondere alle esigenze della filosofia naturale, diventano fine a sè stessi, tantochè la domanda di calcolare una quantità incognita soddisfacente a date condizioni, cede talvolta a quella di decidere se essa possa o meno calcolarsi con dati procedimenti, cioè esprimersi con algoritmi o funzioni di data qualità.

Non è già che i matematici anteriori al nostro secolo non abbiano dato valore a ricerche fuori dal campo delle applicazioni. Basta ricordare l'interesse che, per tradizione antica, si è sempre accordato alla geometria e quello suscitato nei più alti intelletti matematici dalle ardue questioni della teoria dei numeri. Ma è significativo che Newton, avendo già conseguito il possesso dei metodi dell'analisi infinitesimale, non abbia voluto esporli di per sè, quasi come giuochi o eser-

cizi geometrici, aspettando a mostrarli istrumento essenziale nella costruzione della Dinamica celeste.

Di aritmetica (teoremi di Fermat) e di geometria elementare (poliedri) si è occupato il più grande matematico del secolo XVIII, LEONARDO EULERO [1]. Il quale, colla scoperta — fatta indipendentemente da R. CÔTES — della formula che lega l'esponenziale alle funzioni circolari (1747), colla trattazione più generale delle curve piane rappresentate da equazioni di secondo grado, e colle « Istituzioni » di Calcolo differenziale e integrale, prelude agli sviluppi teorici del secolo seguente. Egli è il maestro a cui s'ispirano i maggiori matematici di questo secolo: che si apre coi lavori e colle scoperte fondamentali del giovane Gauss.

CARLO FEDERICO (Karl Friedrich) GAUSS — il futuro *princeps mathematicorum* — è nato a Braunschweig il 30 aprile 1777. Aiutato dal duca Ferdinando potè compiere gli studi nel Ginnasio della sua città e poi all'Università di Gottinga (1795-98). A 19 anni si segnalava già colla bella scoperta della costruzione del poligono regolare di 17 lati, da cui presto fu condotto a riconoscere la costruibilità dei poligoni aventi un numero primo di lati della forma $n=2^h+1$ (risolubilità delle corrispondenti equazioni binomie per radicali quadratici). A questa prima pubblicazione seguiva, nel 1799, la dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra, e nel 1801 le *Disquisitiones arithmeticae,* che contengono i fondamenti della moderna teoria dei numeri.

---

[1] LEONHARD EULER, nato a Basilea nel 1707, è morto a Pietroburgo nel 1783. Chiamato da Caterina II successe a Daniele Bernoulli nella cattedra dell'Accademia di Pietroburgo (1733), ma — per invito di Federico II re di Prussia — passò a dirigere la classe di matematiche dell'Accademia di Berlino, dal 1744 al 1766, tornando poi in Russia. Risolse numerose questioni matematiche che toccano la scienza navale, l'astronomia e la fisica; resta celebre la sua risoluzione dei *problemi isoperimetrici,* ripresi poi da Lagrange. Dal 1735, per congestione in seguito a sforzo intellettuale, E. soffrì di una cecità progressiva. Lascia, all'infuori degli scritti tecnici, le *Lettres à une princesse d'Allemagne,* rivolte alla principessa Anhalt-Dessau, cui insegnò la fisica.

Ma dopo questi grandi lavori, il matematico si volge sempre più alle applicazioni, e sebbene nella quiete del suo studio abbia speculato su molti problemi della scienza pura, precorrendo — come è risultato poi — alcune delle più belle scoperte, ha lasciato che altri desse a queste scoperte il nome, pago spesso di sancirne il valore colla sua imponente autorità. Gauss, che dal 1807 fu professore a Gottinga, visse, circondato di alto rispetto, una lunga vita, fino al 1855, esplicando la più larga attività nell'Astronomia, nella Geodesia e nella Fisica-matematica e consegnandone il prodotto in memorie che sono veri modelli di perfezione classica. *Pauca sed matura,* soleva dire; ma i « pauca » empiono molti volumi in *folio.*

In confronto a Gauss stesso, che subordina in qualche modo il suo genio matematico agli scopi delle applicazioni, l'interesse per la matematica pura è affermato, con una certa baldanza, dai matematici più giovani del secolo XIX. « Le matematiche pure, nella lor più pura accezione, dovranno fare nell'avvenire l'oggetto unico del mio studio. Tutte le mie forze saranno impiegate a portar luce nella mostruosa oscurità che regna ora, senza contestazioni possibili, sulla Analisi » scrive Abel ad Hansteen (Dresda, 29 marzo 1826). D'altronde i nuovi atteggiamenti di Abel e di Jacobi, hanno pur dato luogo a qualche critica di Poisson, in un rapporto sui *Fundamenta nova* cui allude una nota lettera di Jacobi a Legendre (2 luglio 1830) [1]:

« M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science c'est l'honneur de

---

[1] In C. A. Bjerknes, *N. H. Abel.* « Mémoires de la Soc. des Sciences de Bordeaux », 1884 (pag. 96).

Il pensiero di Jacobi s'incontra qui con quello di Federico II.

l'esprit humain et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une questione du système du monde... ».

Ma l'evoluzione delle idee che porta all'incremento delle matematiche pure, deve essere chiarita in rapporto alle stesse condizioni della scienza matematica, alla fine del secolo XVIII o agli inizii del XIX. Da quali problemi e da quali esigenze traggono origine i nuovi indirizzi del pensiero matematico?

Una risposta adeguata alla domanda importerebbe la valutazione storico-critica e scientifica di codesti indirizzi, quale non può trovar posto nella nostra esposizione. Tenteremo soltanto di indicare, in largo senso, alcuni dei motivi generali che dominano i nuovi sviluppi, ma anche per ciò dovremo accennare a teorie che non possono sempre essere comprese da chi non abbia almeno la conoscenza delle matematiche che si studiano nel primo biennio delle nostre Facoltà universitarie (1). Il lettore che non risponda a tali condizioni dovrà passare oltre a ciò che trovi difficile in questa esposizione. In ogni caso non gli dispiacerà di gettare uno sguardo su qualche tratto caratteristico che illumina la personalità dei grandi matematici, e conferisce alla loro vita un interesse umano.

BIBLIOGRAFIA

EULER LEONHARD, *Opera omnia* a cura di F. RUDIO, A. KRAZER, P. STÄCKEL. Lipsia, Teubner, 1911.

GAUSS KARL FRIEDRICH, *Werke*. Lipsia-Berlino, 1863-1929.

2. - ANALISI QUALITATIVA:

TEORIA DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

Nel progresso tumultuoso dei metodi matematici suscitato in gran parte dai grandi problemi della filosofia natu-

---

(1) All'ingrosso, e salvo per i concetti della Geometria proiettiva nonchè per il rigore della trattazione, sono le matematiche, o la maggior parte delle matematiche, acquisite prima del secolo XIX.

rale appaiono presto difficoltà e limiti insuperabili. Taluni procedimenti, che hanno avuto facilmente ragione di certi problemi, riescono spesso infruttuosi in ordine a problemi apparentemente poco più alti che si affacciano come naturale estensione di quelli già risoluti. Esempi di ciò si presentano fin dalle matematiche antiche: la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo non si conseguono più con quelle operazioni della riga e del compasso (retta e circolo) che si usano per sciogliere tutti gli ordinari problemi costruttivi della geometria elementare. E già i Greci ebbero a ricorrere per codeste costruzioni al tracciamento di curve superiori o ad istrumenti capaci di descriverle (per esempio alla cissoide di Diocle o alla concoide di Nicomede) [1]. Essi mostrano così di ritenere che le anzidette costruzioni elementari *non possono* farsi coi soli mezzi elementari della retta e del cerchio. Ma, a dir vero, la questione teorica della *possibilità* non sembra esser da loro posta, nonchè risolta; e riesce chiarita invece dalla moderna geometria analitica, ed in modo preciso dalla determinazione (che si trova alla soglia degli sviluppi nuovi dell'Algebra di cui andiamo a discorrere) delle equazioni risolubili mediante radicali. (Cfr. gli studi di Gauss sui poligoni regolari).

Ora la risoluzione delle equazioni algebriche di 3° e 4° grado, per opera degli algebristi italiani del secolo XVI, suscita, analogamente, la domanda di risolvere in generale le equazioni algebriche di grado qualsiasi mediante radicali (senza limitazione dell'ordine); ed i matematici debbono spendere lunghi ed infruttuosi sforzi nel tentativo di tale risoluzione.

Sorgeva quindi il dubbio se la risoluzione cercata non fosse a priori limitata dai mezzi adoperati all'uopo, e con questi impossibile. Si poneva così un problema teorico di possibilità (s'intende possibilità *relativa*) che il secolo decimonono ereditava dai precedenti: per esso già implicitamente

---

[1] Cfr. p. es. l'art. di A. Conti nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* raccolte e coordinate da F. Enriques (Vol. III, Zanichelli, Bologna).

si scopriva dietro all'analisi *quantitativa* delle equazioni una analisi *qualitativa*.

Bisogna rendersi conto della novità che presenta, nel suo momento storico, codesto problema qualitativo. Intelletti matematici di prim'ordine cercano la risoluzione di una questione (nel nostro caso la risoluzione delle equazioni algebriche); per riuscirvi mettono in opera i soli mezzi che posseggono e che hanno visto adoperare in casi analoghi, senza avere coscienza che ciò importi a priori una limitazione; a loro dunque sembra che il raggiungimento dello scopo proposto debba essere possibile se *esistano* (come di fatto esistono) le radici dell'equazione cercata; l'insuccesso dei tentativi mostra solo la difficoltà della questione ovvero l'insufficienza degli ingegni; come mai si oserebbe negare a priori che dove noi non siamo riesciti nemmeno altri riescirà, comunque si adoperino all'uopo i più forti intelletti e i risultati di un'esperienza accumulata? D'altronde se anche si sollevi un tal dubbio, chi potrà mai effettivamente dimostrare che una certa risoluzione non sia possibile?

Come accade generalmente nella storia del pensiero, la consapevolezza della questione si è affacciata qui in stretta connessione con idee analoghe suggerite da altri campi di ricerca, e in seguito alla luce recata da esempi particolari. Per le equazioni algebriche si può dire che un certo lume portano già le riflessioni di Lagrange (1770) intorno alle equazioni di 3° e 4° grado: dove si rende manifesto che la risoluzione sta in stretto rapporto col sistema (gruppo) delle sostituzioni o permutazioni di 3 o 4 lettere.

A ben guardarci si tratta qui di un'osservazione molto semplice. Le funzioni simmetriche delle n radici di un'equazione di grado n sono funzioni razionali dei coefficienti (Newton). S'intuisce che faremo un progresso verso la risoluzione dell'equazione, che importa l'espressione delle singole radici, se si arrivi a determinare qualche funzione delle radici esprimibile pei coefficienti, che non sia più simmetrica, ma cambi di valore almeno per alcune permutazioni delle dette radici. Qui sta il germe delle considerazioni che condussero, indipendentemente l'uno dall'altro, Ruffini e Abel alla dimostra-

zione della irresolubilità dell'equazione generale del 5° grado per mezzo di radicali.

Paolo Ruffini, che giunse alla scoperta una ventina di anni prima, è nato presso Roma nel 1765, ed è vissuto poi sempre a Modena, dove è morto il 9 maggio 1822. Medico e matematico, insegnò istituzioni analitiche nell'Università di Modena dal 1787 al 1798, quando, per non aver voluto prestare il giuramento civico richiesto dal Governo della Cisalpina, fu dimesso dalla cattedra. Richiamato ad insegnare nel 1799, passò nel 1807 alla Scuola militare di artiglieria e genio, finchè nel 1814, essendo stata restaurata l'Università ducale di Modena, egli vi fu preposto come rettore, con insegnamento di clinica medica e di matematica applicata.

La trattazione del Ruffini è contenuta in più memorie successive che vanno dal 1799 al 1806, e si è venuta perfezionando anche attraverso le discussioni avute coi matematici contemporanei: in particolare col Malfatti, suo consocio nella cosiddetta società dei XL (quaranta). Tuttavia essa lascia una lacuna per ciò che si riferisce alla forma canonica delle espressioni irrazionali costruite mediante radicali, che Abel doveva più tardi giustificare, estendendo in qualche modo le forme canoniche delle irrazionalità dipendenti da radicali quadratici, che si trovano implicitamente contenute nel libro X dell'Euclide.

Abel, che in principio ignorava l'opera del suo predecessore, cominciò ad occuparsi della questione nel 1824, e vi ritorna sopra in memorie del 1826 e del 1829. Al sunto della seconda memoria, che si trova nel Bollettino di Férussac, è aggiunta una nota della redazione, che cita il lavoro di Ruffini e parla della buona accoglienza fattale da Cauchy. Verosimilmente da questa nota Abel ha avuto notizia del suo predecessore, e lo cita espressamente nell'introduzione alla terza memoria con le seguenti parole: « Le premier et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre Ruffini; mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas

toujours satisfaisant. Je crois que la démonstration que j'ai donnée dans le premier cahier de ce journal ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur; mais elle n'a pas toute la simplicité dont elle est susceptible. Je suis parvenu à une autre démonstration, fondée sur les mêmes principes, mais plus simple, en chercant à résoudre un problème plus général ».

Il teorema di Ruffini-Abel sulla impossibilità di risolvere per radicali l'equazione generale di 5° grado non è che un esempio particolare di una possibile teoria della risolubilità delle equazioni algebriche. E questo esempio mostra già l'ordine di idee che la teoria dovrà sviluppare. Si tratta di studiare quelle permutazioni e sostituzioni sopra n lettere che sembrano un semplice giuoco, e di cui Lagrange aveva compreso il significato, per riguardo alla risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado.

Questo studio è stato spinto innanzi da Ruffini, da Cauchy e da Abel; tuttavia le considerazioni dirette ad approfondire la natura di codesto *giuoco* e a trarne deduzioni generali concernenti la risolubilità delle equazioni algebriche apparivano ardue, astratte e a prima vista repulsive. Se già le prime esposizioni del teorema di Ruffini-Abel erano sembrate generalmente oscure e difficili, non vi è da stupire che il creatore della nuova teoria generale delle equazioni dovesse sperimentare l'incomprensione dei suoi giudici. Tanto più che questo creatore fu un giovane scapestrato di venti anni, già studente alla Scuola Normale di Parigi, che — ignoto o quasi — presentava una memoria verosimilmente assai oscura all'Accademia di Francia: intorno alla quale il relatore, Poisson, ebbe a giudicare che conteneva ragionamenti non abbastanza chiari nè sufficientemente svolti per convincere dell'esattezza dei risultati.

Evariste Galois — il genio che ha costituito questa teoria — era nato a Bourg-la-Reine il 25 ottobre 1811. Percorse, non senza difficoltà, la scuola media. A 16 anni il suo professore Pierrot dichiarava « sa facilité, à laquelle il faut croire...., ne le conduira à rien; il n'y a trace dans ses devoirs, que de négligence et de bizarrerie ». Tuttavia Galois aveva una passione, quasi un furore per le matematiche, ed eccel-

leva nella classe di Matematiche speciali. Non è riescito però ad entrare all'École Polytechnique ed invece si è fatto ammettere all'École Normale Supérieure. Dalla quale tuttavia è stato espulso nel 1830. Egli era uno spirito rivoluzionario, non privo di generosità, ma un po' turbolento e — insomma — ciò che si dice un « cattivo soggetto ». Fu in prigione, ed infine si compromise per una donna, trovandosi obbligato ad accettare un duello, nel quale lasciava la vita. Aveva allora 20 anni e 7 mesi. Ha lasciato scritto [1] : « Je prie les patriotes mes amis, de ne pas me reprocher de mourir autrement que pour le pays. Je meurs victime d'une infame coquette. C'est dans un misérable cancan que s'éteint ma vie ».

Ma, nella notte che precede il fatale duello, Galois redige ancora una volta il suo lavoro, che dirige al suo amico Chevalier : « Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr ; mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'énoncer des théorèmes dont je n'aurais la démonstration complète.

Tu prieras Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes. Après celà, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis ».

Il lavoro fu pubblicato soltanto nel 1846 per opera di Liouville. Tuttavia le difficoltà dell'esposizione troppo concisa, e soprattutto delle idee nuove, non hanno permesso subito ai matematici di penetrarne l'alto ed arduo senso. Finchè non riuscì ad Enrico Betti [2] di dimostrare le proposizioni che vi figurano soltanto enunciate. A questo proposito

---

[1] Cfr. *La vie d'Evariste Galois* par P. Dupuy in *Eloges* (« Annales de l'Ecole Normale Sup. », 1896).

[2] Il Betti (n. nel Pistoiese il 21 ottobre 1823, m. a Pisa l'11 agosto 1892) fu professore all'Università di Pisa e poi anche direttore di quella Scuola Normale Superiore : fra i maggiori, e forse il maggiore, dei maestri della nuova Scuola di matematici dell'Italia risorta. Cfr. V. Volterra, *Betti, Brioschi e Casorati*, in « Saggi scientifici », Bologna, 1920 ; F. Enriques, *Betti*, art. dell'« Enciclopedia Italiana ».

giova ricordare che il Betti mostrava ai suoi discepoli di Pisa una lettera del Libri (circa del 1851), che pare sventuratamente perduta: nella quale il Libri sconsigliava in certo modo il suo corrispondente dall'occuparsi di questioni che dovevano allora apparire, nei circoli parigini, oscure ed infeconde.

In seguito all'opera del Betti la dottrina di Galois è venuta sempre più crescendo nella stima dei matematici: il « Traité des substitutions et des équations algébriques » di CAMILLE JORDAN (1870) richiamava su di essa la più larga attenzione del pubblico. Quind'innanzi essa verrà celebrata come uno dei più bei prodotti del genio matematico nel secolo XIX.

Il senso generale della nuova teoria della risolubilità delle equazioni si può ora spiegare come segue.

Sia data un'equazione algebrica $f(x)=0$, del grado n, le cui radici si designano con $x_1 x_2 \ldots x_n$. È noto che le funzioni simmetriche di $x_1 x_2 \ldots x_n$ le quali rimangono invariate per tutte le sostituzioni sopra le x_i (formanti il gruppo totale) sono funzioni razionali dei coefficienti. Ma (almeno per equazioni particolari) potrà darsi che esista un gruppo G di sostituzioni sopra le x_i, più ristretto del gruppo totale, tale che valga a definire le funzioni φ esprimibili razionalmente per i coefficienti. In ogni caso il gruppo G, sia o no totale, si dice *gruppo di Galois* dell'equazione proposta: la possibilità di agevolare la risoluzione dell'equazione $f=0$, riconducendola ad un'altra equazione i cui coefficienti si esprimano razionalmente per quelli di f, dipende dall'esistenza di funzioni delle radici, non simmetriche, che tuttavia resultino funzioni razionali dei coefficienti.

Come si è detto, l'equazione *generale* di grado n ha come gruppo di Galois il *gruppo totale* di $n!$ sostituzioni sopra le n radici. Invece l'equazione *binomia* $z^n=t$ (che si risolve coll'estrazione d'una radice d'ordine n sopra t) ha come gruppo il *gruppo ciclico* generato dalle potenze della sostituzione circolare sulle radici

$$(z_1\, z_2 \ldots z_n);$$

infatti si verifica facilmente che le funzioni razionali di z_1, $z_2 \ldots . z^u$, che restino invariate per la suddetta sostituzione $(z_1 z_2 \ldots . z^u)$, resultano funzioni razionali di $z_1{}^n = t$.

In quest'ordine di idee si riesce ad assegnare la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità per radicali di un'equazione di grado n, la quale si traduce in una proprietà caratteristica del relativo gruppo di Galois. Per comprendere il resultato ottenuto, si avverta intanto che ogni radicale il cui indice sia un numero composto si può ridurre ad una successione di radicali sovrapposti, d'indice primo. Dunque, se l'equazione è risolubile per radicali, essa potrà risolversi mercè l'estrazione di successivi radicali d'indice primo. Ciò posto si prova che l'estrazione del primo radicale d'indice p (qualora esso venga *aggiunto* ai coefficienti di f ampliandone così il campo di razionalità) ha per effetto di ridurre il gruppo di Galois della f — diciamo G — ad un *sottogruppo invariante* G' (sottogruppo trasformato in sè stesso da tutte le sostituzioni di G) il cui ordine è eguale all'ordine di G diviso per il numero primo p. In conclusione la *condizione di risolubilità per radicali della* f, si traduce in una *composizione* del suo gruppo di Galois, G', cioè nell'esistenza di una successione di sottogruppi invarianti, G', G''..., in modo che il rapporto degli ordini di GG', $G'G''$... sia sempre un numero primo; ciò si esprime dicendo che il *gruppo* G deve avere per *fattori di composizione* dei *numeri primi*.

Per $n > 4$ il gruppo totale G di $n!$ sostituzioni sopra n lettere possiede un solo sottogruppo invariante, che è il *gruppo alterno* G', formato dalle $\frac{n!}{2}$ *sostituzioni pari*, e il G' non possiede più sottogruppi invarianti; perciò l'equazione generale di grado n non è risolubile per radicali, come afferma il teorema di Ruffini-Abel. Invece per $n = 3$, 4 si possono illustrare le circostanze da cui dipende la risoluzione dell'equazione.

Per $n = 3$, il gruppo totale G_6 di 6 sostituzioni sopra tre lettere contiene come sottogruppo invariante il gruppo ciclico G'_3 delle sostituzioni

$$(x_1x_2x_3),\ (x_1x_3x_2),\ 1:$$

il primo fattore di composizione (cioè il rapporto degli ordini di 6 a 3) è 2; a sua volta il G'_3 contiene come sottogruppo invariante l'identità 1: fattore di composizione 3. In corrispondenza a queste circostanze l'equazione $f(x)=0$ si risolve colla successiva estrazione di due radici, d'ordine 2 e 3: precisamente la $f=0$ si riduce al caso ciclico dell'equazione cubica binomia cercando di determinare una funzione razionale delle radici $x_1x_2x_3$, la quale non sia simmetrica (cioè invariante per tutte le sostituzioni di G_6) ma resti invariata per le sostituzioni del gruppo G'_3: sia, per es.,

$$z=(x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2x_3)^3 \quad \left(\varepsilon=\frac{2\pi i}{e^3}\right)$$

la z assume allora, per tutte le possibili sostituzioni su $x_1x_2x_3$, soltanto *due* valori diversi e quindi è radice d'un'equazione risolvente di secondo grado, coi coefficienti razionali nei coefficienti di f; dalla z si ottengono poi le radici di $f=0$ coll'estrazione di una radice cubica.

Per $n=4$, il gruppo totale G di 24 sostituzioni contiene come sottogruppo il gruppo alterno G' di 12 sostituzioni e questo a sua volta possiede un sottogruppo invariante G'', formato dalle sostituzioni permutabili

$$(x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3),\ 1;$$

infine nel G'' è contenuto un sottogruppo invariante del 2° ordine, per es. il G''', formato da

$$(x_1x_2)(x_3x_4),\ 1,$$

e in quest'ultimo l'identità.

Si hanno dunque come fattori di composizione i numeri primi:

$$2,\ 3,\ 2,\ 2.$$

Tali circostanze si rispecchiano nella formula di risoluzione del Ferrari, dove occorre estrarre prima una radice quadrata e su questa una radice cubica, e quindi ancora due radici quadrate.

BIBLIOGRAFIA

RUFFINI PAOLO, *Opere matematiche*, vol. I a cura di E. Bortolotti. Palermo, 1915.

ABEL NIELS HENRICH, *Oeuvres complètes*. Nouvelle édition par Sylow et C.ie, Christiania, 1881.

GALOIS EVARISTE, *Oeuvres mathématiques*. Parigi, Gauthier et Villars, 1897.

BETTI ENRICO, *Opere matematiche*, due vol. Milano, Hoepli, 1903-15.

3. - TEORIA DELLE FUNZIONI: FUNZIONI ELLITTICHE

Lo stesso ordine di idee che porta a riconoscere ciò che vi è di relativo nella domanda di risolvere un'equazione algebrica quando si vogliono espresse le radici per radicali, e quindi la irrisolubilità di questo problema in generale, porta similmente ad allargare la concezione delle funzioni, riconoscendo che certi integrali di funzioni elementari note non possono esprimersi mediante funzioni analoghe. E non a caso gli stessi uomini si trovano ad avere lavorato, quasi contemporaneamente, in questi due campi di studio.

Fino da quando — con Newton e Leibniz — fu visto nel Calcolo integrale l'inverso del Calcolo differenziale, si ebbe a notare che — mentre la differenziazione delle funzioni elementari (funzioni razionali o algebriche, circolari, esponenziali e logaritmi) riesce facile entro il campo di codeste funzioni — all'opposto l'integrale ci mette presto di fronte a problemi difficili, che non riesce egualmente di risolvere. In particolare fissiamo la nostra attenzione sopra un esempio. È noto come si possa calcolare l'integrale di un radicale quadratico che porti sopra un polinomio di 2° grado della variabile, ovvero sopra una funzione razionale di un radicale siffatto: il metodo di sostituzione riconduce codesto integrale a quello di una funzione razionale, che si esprime quindi per mezzo di funzioni algebrico-circolari-logaritmiche. Ora questo metodo non riesce più se si tratti di integrare la funzione razionale di un radicale, egualmente quadratico, ma portante sopra un polinomio di 3° o 4° grado. Integrali di

siffatto genere s'incontrano nel problema della rettificazione di alcune curve, cioè: della parabola quadratica (GIOV. BERNOULLI) della parabola biquadratica e della lemniscata (FAGNANO, 1714), dell'ellisse e dell'iperbole (MAC-LAURIN e EULERO, 1761). Essi prendono il nome di *integrali ellittici*. I matematici che li hanno studiati, scoprendone notevoli proprietà (in ispecie quella che estende il teorema d'addizione delle funzioni circolari) hanno acquistato, a poco a poco, la convinzione che sia impossibile di ridurli alle poche funzioni elementari ad essi note, cioè alle funzioni algebrico-circolari-logaritmiche. Tale convinzione è esplicitamente affermata nei lavori di A. M. LEGENDRE che ne intraprende la classificazione, a partire dal 1786.

Così un problema di Calcolo integrale aveva condotto a scoprire un campo di trascendenti nuove. Anzichè proseguire i tentativi non riusciti per ricondurre il calcolo degli integrali ellittici a quello delle anzidette funzioni elementari, si trattava ora di intraprendere uno studio razionale di codesta specie nuova di funzioni, sotto l'aspetto *qualitativo*.

In questo senso Abel diceva che i problemi dell'Analisi debbono essere posti sempre nella loro più grande generalità, facendone dipendere la risoluzione non dalla forma accidentalmente particolare delle espressioni su cui opera il calcolo, ma dalla natura e dalla qualità delle funzioni che entrano in giuoco: ed ancora che ogni probema deve essere enunciato in guisa che sia a priori risolubile, come quando si domanda se sia possibile una risoluzione di dato tipo, o quali sieno i tipi irriducibili a cui può ricondursi la radice d'un'equazione algebrica, ovvero l'integrale di una certa funzione, anzichè cercare di determinare l'una o l'altro a tentoni, presumendo una forma di risoluzione impossibile (risoluzione delle equazioni algebriche per radicali, cfr. § 2, e integrazione mediante funzioni algebrico-circolari-logaritmiche).

Lo studio delle trascendenti ellittiche doveva aprire un'èra nuova dell'Analisi, grazie a due idee fondamentali introdotte da Abel: considerare in luogo degli integrali ellittici le funzioni inverse (funzioni ellittiche) che sono proprio le analoghe dell'esponenziale o del seno (laddove l'integrazione di

funzioni razionali porta al logaritmo o all'arcoseno, ecc.); e studiare codeste funzioni, non soltanto per argomenti reali, bensì nel campo della variabile complessa: dove si rivela subito la doppia periodicità delle funzioni ellittiche. Queste idee, secondo il biografo di Abel, C. Bierknes, risalirebbero al 1823; e se ne raccolgono i frutti nelle memorie pubblicate il 1827.

Per spiegare il significato che esse assumono nell'evoluzione dell'Analisi, convien ricordare in breve gli sviluppi della nozione della variabile complessa (o immaginaria).

Come abbiam detto nel § 16 del Libro primo, i numeri immaginari — espressioni analitiche impossibili che indicano l'estrazione di un radicale quadratico da un numero negativo — si presentano per la prima volta nello studio delle equazioni di 3° grado, per opera degli algebristi italiani del Cinquecento e in ispecie nella mente del bolognese Rafael Bombelli. A dir vero anche la risoluzione delle equazioni di 2° grado dà origine a radici immaginarie (caso del discriminante negativo); ma questo caso si affaccia sempre in corrispondenza a problemi impossibili: l'espressione analitica priva di senso risponde così alla impossibilità del problema e vale a indicarla: non c'è dunque luogo a ritenere che essa debba designare qualcosa di non assurdo. Invece, nel caso irriducibile dell'equazione del 3° grado (messo in luce da G. Cardano), la formula tartaleana di risoluzione dell'equazione contiene un radicale portante sopra il discriminante negativo e si presenta quindi come priva di senso, laddove il problema ha in effetto tre soluzioni reali. E dunque la formula non-senso apparisce dover coprire un senso più riposto, che si è invitati a ricercare. Il genio di Bombelli si eleva di qui alla considerazione di nuove quantità *silvestri*, che sono appunto gli immaginari.

Abbiamo accennato alle molte discussioni che si fecero poi intorno ai numeri immaginari (o complessi che resultano da quelli per addizione coi numeri reali); i quali apparivano insieme repulsivi ed attraenti: repulsivi per il patente assurdo che sembrano introdurre, ed attraenti per lo stesso mistero che li circonda e per le promesse che sembrano conte-

nere: giacchè presto s'indovina che solo nel campo dell'immaginario si può dar senso preciso alla domanda del numero delle radici dell'equazione algebrica di grado n da Leibniz, a Wallis, a Vieta, a De Moivre, a Wessel fino ad Argand (1806) e Gauss, quest'ordine d'idee si chiarisce fino a precisarsi in una dottrina logica. Frattanto Eulero, definendo l'esponenziale con esponente immaginario, era riescito a mettere in luce una profonda parentela non sospettata fra l'esponenziale e le funzioni circolari. In tal guisa appariva che proprio nel campo della variabile complessa si svelano più chiari i rapporti qualitativi delle funzioni.

Era dunque naturale che ABEL, indagando l'essenza qualitativa delle nuove trascendenti ellittiche, le trasportasse nel campo della variabile complessa: dove raccolse subito un primo frutto dell'idea colla accennata scoperta della doppia periodicità. Ed è del pari naturale che la stessa idea compaia negli sviluppi di JACOBI, sia che essa si sia affacciata spontanea alla sua mente, sia che egli l'abbia raccolta da un primo cenno del suo emulo: anche in questo secondo caso la pronta comprensione del valore dell'idea si spiega appunto coi precedenti storici e massime col riattacco ad Eulero, che si trova all'origine degli studi dei due giovani, Abel e Jacobi [1].

Frattanto la teoria delle funzioni ellittiche, e quella più generale delle trascendenti abeliane, che — dopo Jacobi — doveva essere magnificamente sviluppata da Riemann e Weierstrass, viene a costituire il modello per la nuova teoria delle funzioni di variabile complessa: il campo di esemplificazione e di applicazione concreta delle dottrine generali che germinano, contemporaneamente, dalle ricerche di Cauchy.

Mentre le funzioni ellittiche pongono ad Abel e a Jacobi dei problemi particolari attinenti alla funzione della variabile complessa, la teoria generale di queste funzioni si svolge

---

[1] Per una giusta valutazione dei rapporti fra Abel e Jacobi ci riferiamo (con F. Klein) al *Mémorial* di SYLOW *N. H. Abel* (Cristiania, 1902) e al *Festschrift* di KÖNIGSBERGER *C. G. J. Jacobi* (Lipsia, 1904).

nei lavori di CAUCHY, proseguiti per oltre venticinque anni, a partire dal 1825 (1).

Quali motivi giustificano storicamente una costruzione di tal genere? Certo essa non risente nelle sue origini dei problemi che formano oggetto delle ricerche di Abel e di Jacobi; ma il comune influsso di Eulero e di Gauss spiega assai bene ciò che vi può essere di comune nella ispirazione di questi geometri. Il giudizio è più che un'induzione, perchè si sa oggi che Gauss ha precorso Cauchy colla considerazione dell'integrale $\frac{dz}{z}$ nel piano della variabile complessa (quello che conduce alla polidromia del logaritmo riconosciuta da Eulero), sebbene le sue osservazioni in proposito, risalenti al 1811, sieno rimaste inedite (2).

D'altronde i primi sviluppi di Cauchy non mostrano ancora l'idea costruttiva di una teoria delle funzioni di variabile complessa, nel senso in cui noi oggi la intendiamo. Prima di lui Laplace, Brisson e il russo Ostrogradsky, hanno considerato integrali fra limiti immaginarii o complessi; ed egli ne riprende lo studio per fissare il grado di generalità che questi integrali comportano e il numero dei valori che possono avere. L'utilità della ricerca, e del calcolo dei residui che ne deriva, sarà anzitutto di fornire un mezzo per il calcolo degli integrali definiti, specie fra limiti reali. Bisogna rendersi conto che l'immaginario di per sè doveva apparire allora di scarso significato.

Ora, poichè lo scopo dello studio (o almeno uno degli scopi principali) è l'applicazione dei resultati al caso di funzioni definite nel campo reale, è ovvio che le funzioni di variabile complessa considerate da Cauchy sieno, per presupposto implicito, quelle che provengono dalla estensione delle funzioni più comuni di variabile reale. Cauchy si accorge che l'integrale di tali funzioni lungo una linea nel piano della variabile complessa, riesce indipendente dalla variazione in-

---

(1) *Mémoire sur les intégrales définies prises entre de limites imaginaires.* Parigi, 1825.

(2) *Lettera a Bessel,* in GAUSS, « Werke », X, 1 (pag. 365).

finitesima della linea stessa, poichè si ha a fare qui con un integrale di differenziale esatto (del tipo che compare nella nota teoria del potenziale). Segue quindi che l'integrale di una funzione di variabile complessa è indipendente dalla linea d'integrazione, finchè almeno questa varii in un campo ove l'integrando si mantiene finito e continuo: i punti singolari (d'infinito o di discontinuità) dan luogo al calcolo dei residui.

Soltanto nelle ricerche degli anni più tardi Cauchy perviene a vedere la sua propria costruzione in una luce simile a quella in cui noi oggi la vediamo. E qui l'evoluzione del suo pensiero appare in rapporto collo sviluppo della teoria delle funzioni ellittiche, poichè in diverse memorie dei Comptes-rendus dell'Accademia di Francia del 1843, egli applica appunto il calcolo dei residui (ove ha conseguito ormai i resultati più completi fin dal 1840) alle funzioni ellittiche, ritrovando alcuni teoremi di Jacobi e ricavandone nuove formule.

Per comprendere nel suo vero significato la teoria delle funzioni di variabile complessa, teniamo presente il calcolo infinitesimale per le funzioni di variabile reale. Alla base di questo calcolo sono i due concetti della derivata e dell'integrale: a prescindere da singolarità eccezionali, l'intuizione delle funzioni che s'introducono naturalmente nell'Analisi, ci dà che per esse derivata e integrale esistono sempre. Ma quando si passa nel campo della variabile complessa, la funzione appare dipendere da *due variabili* reali, e nasce quindi una doppia incertezza in ordine al significato di codesti concetti. Siccome la variabile complessa è rappresentata da un punto del piano, e ci si può avvicinare ad esso in direzioni diverse, si presenta la questione se il limite del rapporto incrementale (che darebbe la *derivata*) possa ritenersi indipendente dalla *direzione di avvicinamento*. In secondo luogo (come sopra è implicitamente accennato) l'integrazione di una funzione di variabile complessa fra due limiti e due punti del piano di Argand-Gauss, riesce definita secondo una *linea*, congiungente i due punti, da cui a priori sembra dipendere.

Ora l'ipotesi di una derivata indipendente dalla direzione di avvicinamento era implicitamente ammessa da Cauchy, in

quanto — come si è detto — egli considerava funzioni provenienti dalla estensione formale od analitica di funzioni reali. Da tale ipotesi egli traeva le conseguenze circa l'indipendenza dell'integrale dalla linea d'integrazione (colle restrizioni e modificazioni che qui occorrono).

Soltanto nelle note del 1851, Cauchy dà esplicito rilievo alla condizione che la funzione di variabile complessa debba avere in ogni punto una derivata indipendente dalla direzione di avvicinamento, ed introduce il nome di condizioni di *monogeneità*, osservando che — di conseguenza — la parte reale della funzione e il coefficiente dell'immaginario, dovranno soddisfare alla nota equazione

$$\Delta_2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} = 0.$$

Appunto le condizioni di monogeneità (esistenza e unicità della derivata) portano per Cauchy l'indipendenza (condizionata come sopra) dell'integrale dalla linea d'integrazione. In tempi più recenti, MORERA recava al resultato di Cauchy un importante complemento, stabilendo che, viceversa, l'indipendenza dell'integrale di una funzione di due variabili dalla linea d'integrazione ha per conseguenza che questa sia una funzione (monogena) della variabile complessa.

Diversi titoli dovevano segnalare l'opera di Cauchy ai matematici contemporanei e posteriori. Come si è detto, le condizioni di monogeneità indicano la dipendenza delle funzioni di variabile complessa da un'equazione alle derivate parziali (il cosidetto Δ_2), che giuoca in maniera essenziale in molte teorie della fisica-matematica. Inoltre, restando nel campo delle matematiche pure, Cauchy, fin dal 1831, è riuscito a dimostrare che, per ogni punto ove la funzione della variabile complessa sia regolare vale uno *sviluppo* in serie *di potenze*: quello stesso che già era stato incontrato da Taylor, ma del quale — a differenza di ciò che appariva nel campo della variabile reale in seguito agli studi critici di Lagrange — si riusciva ora a determinare in modo luminoso le condizioni di validità, segnando il campo di convergenza della serie, che è il cerchio col centro nel punto dato che passa per il punto

singolare più vicino. Scoperta veramente magnifica che stabiliva l'identità delle funzioni di variabile complessa con quelle che Lagrange aveva chiamato *funzioni analitiche*! [1].

Un'idea ulteriore, portata in questa dottrina da Weierstrass, trarrà dallo sviluppo di Taylor-Cauchy una veduta per così dire naturalistica delle funzioni della variabile complessa: accenniamo al *prolungamento analitico*, grazie al quale una funzione primitivamente definita in un certo campo viene naturalmente estesa fuori di questo (mediante il raccordo di serie convergenti che la rappresentano in campi parzialmente sovrapponentisi), e riesce quindi definita integralmente in tutto il suo campo accessibile.

Questa veduta ha un significato filosofico che importa mettere in luce. Mentre le funzioni di variabile reale (secondo la definizione che di esse si dà con Dirichlet) appariscono enti puramente artificiali o convenzionali, che si costruiscono dando ad aribitrio i loro valori in corrispondenza a quelli della variabile, all'opposto le funzioni di variabile complessa rispondono, per così dire, ad una realtà intelligibile, data fuori del nostro pensiero, cioè ad un mondo d'idee platoniche, in accordo colle concezioni di quei matematici che discendono direttamente dai *realisti* del Medio Evo. In altri termini esse appaiono (per esempio agli occhi di Hermite) come *specie* che il matematico-naturalista scopre o descrive, ma non inventa. Ed è divertente notare l'ironia della sorte: gli analisti costruttori di questa dottrina, Cauchy come Weierstrass, si trovano proprio fra i più radicali nominalisti in alcune questioni filosofico-matematiche caratteristiche, in cui ebbero a prender partito.

BIBLIOGRAFIA

Per la teoria generale delle funzioni di variabile complessa abbiamo citato i principali trattati al termine del libro primo. Qui ci limitiamo ad aggiungere la citazione dell'articolo di C. Bieberbach, *Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variabeln*, in *Enc. der*

---

[1] Complementi essenziali del teorema di Cauchy sono i noti sviluppi di Laurent (1843) e di Puiseux (1850).

math Wiss., III C 4 (1920), e a dare alcune indicazioni che si riferiscono alle funzioni ellittiche e alle funzioni abeliane, che ne costituiscono l'estensione. Per la storia:

G. BELLACCHI, *Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche*. Firenze, 1894.

F. CASORATI, *Teorica delle funzioni di variabile complessa*. Pavia, 1868.

R. FRICKE, *Elliptische Funktionen*, in « Enc. der math. Wiss. », II B 3 (1913).

A. KRAZER e W. WIRTINGER, *Abel'sche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen*, in « Enc. der math. Wiss », II B. 7 (1921).

Alcuni trattati:

L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. 3ª ed. Bologna, 1928.

E. PASCAL, *Funzioni ellittiche*. Milano, 3ª ed., 1924.

R. FRICKE, *Elliptische Funktionen und ihre Anwendungen*. 2 vol. Lipsia, 1916-22.

F. KLEIN e R. FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*. 2 vol. Lipsia, 1890-92.

A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen*. Lipsia, 1903.

H. F. BAKER, *An Introduction to the Theory of Multiply Periodic Functions*. Cambridge, 1907.

A. R. FORSYTH, *Lectures introductory to the Theory of Functions of two Variables*. Cambridge, 1914.

F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Funzioni ellittiche e abeliane*. Vol IV delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*. Bologna, 1934.

4. - ABEL E CAUCHY

I due uomini che stanno alle origini della teoria qualitativa delle funzioni di variabile complessa, Abel e Cauchy, appartengono a due differenti nazioni, hanno temperamenti e ideali quasi opposti e percorsero vite e carriere diverse.

NIELS HENRIK ABEL, figlio di un povero pastore luterano della Norvegia, è nato a Findö presso Christiansund, il 5 agosto del 1802. Almeno fin dai sedici anni, egli si fece notare per il suo interesse alle matematiche, mostrandosi talvolta un po' recalcitrante nell'adempimento degli altri doveri scolastici. « Il Prof. Riddervold — dice un biglietto trovato una volta sul suo sedile — s'immagina ch'io abbia scritto il mio componimento latino; ma ben s'inganna! ». Aiutato da una

borsa di studio (cui venne un necessario supplemento dalla generosità dei suoi professori) il giovane compì gli studi universitarii, in maniera eccellente. Si poteva rimproverargli soltanto una certa distrazione, perchè talvolta non ristava dall'inseguire la soluzione d'un problema anche durante le ore di lezione; tantochè si racconta che un giorno interrompesse la lezione del Prof. Sverdrup, levandosi bruscamente dal suo posto a gridare « Jeg har det! » (Ci sono!) ».

Abel è essenzialmente un autodidatta, formatosi in ispecie colla lettura di Eulero di cui riconosceva volentieri il possente impulso (« Innanzitutto io penso che, per fare qualcosa in matematiche, bisogna studiare i maestri e non gli scolari »). Tuttavia entrò in più larghi contatti col mondo scientifico.

Con una borsa di studio dell'Università di Christiania (Oslo) Abel intraprese un viaggio in Europa dal 1825 al 1827. Fu a Berlino ove si legò con Adam Crelle, che gli aprì le colonne del nuovo giornale di Matematiche da lui fondato; entrò anzi in familiare amicizia con lui: solevano spesso passeggiare insieme, in compagnia di un terzo che era il geometra Steiner, e (come racconta Geiser) qualcuno del pubblico, che li vedeva passare, diceva « Ecco Adamo coi suoi due figli, Caino e Abele ». Da Berlino Abel passò a Dresda nella primavera del 1826, e poi a Vienna, a Venezia e a Parigi. Aveva evitato di andare a Gottinga, un po' intimidito e irritato dall'opinione che si era formato dell'orgoglio di Gauss, l'uomo inaccessibile da cui non si riprometteva buona accoglienza. Ma a Parigi non potè farsi apprezzare da quei matematici; nonostante i lavori già pubblicati (in tedesco) vi apparve come uno sconosciuto; a qualcuno, anzi, fece l'impressione di una testa un po' turbolenta, che insegue vane utopie. Pure durante il suo soggiorno a Parigi, Abel redasse un grosso « Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions trascendantes » che presentò all'Accademia delle Scienze il 30 ottobre 1826. L'autore lo aveva mostrato a Cauchy, ma racconta egli stesso « il voulut à peine y jeter les yeux, et je puis dire sans vanter qu'il est bon ». La relazione su questa Memoria, per

la negligenza di Cauchy e per altri motivi, doveva subire il ritardo incredibile di 14 anni. Eppure la Memoria conteneva uno dei più bei teoremi dell'Analisi moderna, quello che Legendre chiamerà più tardi « *monumentum aere perennius* », e che da Jacobi ha ricevuto il nome di *teorema d'Abel*: la più vasta generalizzazione del teorema di addizione delle funzioni ellittiche; un grande resultato, conseguito coi più semplici mezzi! Il giovane matematico non osò mai di richiamare l'attenzione sul suo lavoro dimenticato; troppo timido per tentare un appello diretto, credette di averlo richiamato alla memoria di Legendre (che pure era fra i giudici designati dall'Accademia) parlandogli, in una sua lettera, di un altro scritto in cui esso era citato. Oppresso dalla miseria e dai debiti, in poco buone condizioni di salute, Abel lasciò Parigi e tornò in patria rientrando a Christiania il 20 maggio 1827, e quivi non riuscì mai a conseguire una situazione soddisfacente. Due anni dopo, la tisi polmonare che lo minava, lo conduceva prematuramente alla tomba. Morì a Froland, a 27 anni, il 6 aprile 1829, alla vigilia di veder colmati i suoi voti colla chiamata all'Università di Berlino.

Di fronte al giovane poeta delle matematiche, che va ramingo per il mondo, lottando colla miseria e colla malattia, rappresentiamoci ora la figura del rigido cattolico e legittimista Cauchy, più vecchio di Abel di 13 anni, già membro illustre dell'Accademia di Parigi, all'epoca in cui il giovanotto norvegese veniva a bussare alla sua porta.

Augustin Louis Cauchy è nato a Parigi nel 1789. La famiglia, clericale e tradizionalista, passò, sotto la rivoluzione, qualche ora difficile. Il padre, che era avvocato, ebbe allora a ritirarsi in campagna. Una sua lettera di quell'epoca dice: « Avec quelque peu de biscuit et de riz qu'on nous distribue, nous suppléons au pain dont nous n'avons que demi-livre et pas du tout quelquefois; force haricôts et pommes de terre font notre bonne chére ». Questo padre, del resto, provvide con senno all'educazione del figlio, di cui riconobbe l'ingegno precoce. Lagrange gli aveva consigliato di rendergli la via comune abbastanza attraente da seguirla. E il giovanetto per-

corse gli studi classici eccellendo nei versi latini e nella versione greca. Ma soprattutto si distinse nelle matematiche.

Uscito, ingegnere dei « Ponts et Chaussées », dalla Scuola Politecnica di Parigi, egli fu in tale qualità a Cherbourg, fino al 1813. Nel 1816 il governo della restaurazione rimuove dal loro seggio accademico Monge e Carnot, e nomina ad uno dei due posti Cauchy che già per due volte era stato candidato all'Accademia. Poco appresso Cauchy è chiamato ad una cattedra della Facoltà di Scienze, e diventa anche supplente al Collegio di Francia, e professore alla Scuola politecnica. Ma, sopravvenuta la rivoluzione di luglio, egli rifiuta il giuramento di fedeltà al nuovo regno di Luigi Filippo, e quasi fugge a Friburgo in Svizzera, donde passa poi a Torino, chiamato all'Università dal Re Carlo Alberto. Però lascia anche questa cattedra per seguire Carlo X esule a Praga, come precettore del duca di Bordeaux, erede presuntivo del trono. Torna a Parigi nel 1838; e sempre l'obbligo del giuramento gli vieta di accettare un insegnamento universitario. Il suo fiero carattere rifiuta ogni compromesso (« Qu'on me coupe le cou! »); ed egli è pago d'insegnare in un collegio di gesuiti e di lavorare alla scienza prediletta, presentando all'Accademia una straordinaria messe di note e di memorie. Nel 1848 la rivoluzione abolisce il giuramento, ma nel 1852 Napoleone III lo rimette in vigore. Nondimeno l'imperatore consente al genio un'eccezione (che fu fatta anche per Arago) e accogliendo la designazione della Facoltà di scienze, nomina nuovamente Cauchy professore alla Sorbona. Non avendo nulla domandato, egli accetta senza ringraziare. Cauchy muore nel 1857.

Molti aneddoti si contano su di lui. Accenniamo alla sua gara col calcolatore-prodigio Mondeux (1840) ch'ei vinse, approfittando, a dir vero, della conoscenza di formule appartenenti alle matematiche superiori. Infine ricordiamo i versi ch'egli lesse in una seduta pubblica delle cinque Accademie: epistola di un giovane geometra ad un poeta, che cominciava:

Tu me crois obsédé par un mauvais génie [1]

. . . . . .

[1] Cfr. l'*Éloge* citato in bibliografia.

Anche in altri campi diversi Cauchy ha esplicato la sua straordinaria attività, fuori della teoria delle funzioni. Questa mole enorme di lavori, che si succedono a getto continuo, ha forse un po' nociuto alla forma in cui sono esposti.

Sull'impressione che Cauchy fece ad Abel, ci istruisce una lettera di quest'ultimo, che viene richiamata da Arago. Scriveva Abel: « M. Cauchy est celui des mathématiciens qui sait le mieux comment les mathématiques, pour le moment, doivent être traitées. Il y a des choses excellentes, mais sa manière manque de clarté. Je ne le compris presque point d'abord, mais à présent je suis en train ». (Egli aveva avuto occasione di approfittare del *Cours d'Analyse,* da cui certo apprese l'esigenza del rigore nell'uso delle serie). Arago aggiunge: « Faudrait-il s'étonner si Cauchy, à son tour, n'avait pas de premier abord facilement apprécié les idées entièrement nouvelles d'Abel, s'il lui avait fallu aussi quelque temps pour se mettre en train? ». (Arago vuol difendere l'Accademia del ritardo frapposto all'esame della Memoria di Abel, che dovette poi cadere in oblio quando Cauchy ebbe a lasciare Parigi nel 1830).

A Cauchy e ad Abel, fondatori della teoria delle funzioni, va associato Jacobi, di due anni più giovane di Abel, che dicemmo già emulo di lui pei primi lavori sulle funzioni ellittiche, ma che — essendo sopravvissuto per oltre vent'anni — potè esplicare una più vasta attività ed esercitare larga influenza sulla sviluppo delle matematiche in Germania.

BIBLIOGRAFIA

ABEL, *Oeuvres complètes*, op. cit al § 2.

C. A. BJERKNES, *Niels-Henrik Abel, sa vie et son action scientifique.* « Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux », 1884.

SYLOW, *Memorial*, l. c. Cristiania e Lipsia, 1902.

CAUCHY L. AUGUSTIN, *Oeuvres complètes publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences.* Parigi, Gauthier et Villars, 1882.

VALSON, *La vie et les travaux du baron Cauchy.* Parigi, 1868.

J. BERTRAND, *Éloge de A. L. Cauchy,* in *Éloges académiques,* II. Parigi, 1902.

5. - Jacobi

Karl Gustav Jacobi è nato da un banchiere di Potsdam il 10 dicembre 1804. Educato in una casa ricca, con vaste relazioni, studiò all'Università di Berlino, ma soprattutto coltivò le matematiche colla lettura approfondita delle opere di Eulero. Dottore nel 1825, l'anno appresso va a Königsberg, ove diventa successivamente professore straordinario (1827) e poi ordinario (1831). Nel 1843 è chiamato a Berlino, in un posto puramente accademico, che doveva offrirgli maggiore libertà per lo studio: ma quest'ultimo periodo della sua vita riesce in verità meno produttivo, forse anche per le preoccupazioni e le cure che vengono a Jacobi dalla perdita delle sue sostanze. Jacobi muore il 18 febbraio 1851.

Come caratteristiche della personalità di Jacobi (e di quella di Dirichlet) il Klein cita alcune parole che la moglie di Dirichlet scrisse in occasione della sua morte: « I suoi rapporti con Dirichlet erano tanto carini, quando li vedevo seduti accanto per delle ore in silenzio, a *tacer matematiche*, come io dicevo: e bisogna vedere come non si risparmiavano a vicenda, e come Dirichlet gli diceva le verità più amare e Jacobi lo capiva così bene, e s'inchinava col suo grande spirito davanti al grande carattere di Dirichlet.... ».

Jacobi ha sortito da natura un ingegno vivace e versatile, che si svolge non solo a diversi rami delle matematiche pure, sì alla Meccanica proseguendo in ispecie le ricerche di Lagrange e di Fourier. In ogni campo egli spiega la sua ricchezza d'idee, la sua brillante e feconda abilità analitica. Ma all'abbondanza della produzione non risponde sempre una forma compiuta e rigorosa. Egli stesso diceva francamente: « Signori, non abbiamo tempo per il rigore gaussiano! ».

Nonostante questo difetto — o forse anche in parte a cagione di esso — Jacobi esercitò il più largo influsso sulla scuola di Königsberg, che fiorì anche lungamente dopo la partenza del maestro; ed in modo diretto e indiretto accese nei matematici tedeschi lo spirito delle questioni scientifiche particolari, nettamente poste, in cambio del fiacco enciclopedismo che era stato fino allora dominante.

Gli studi di Jacobi sulle funzioni ellittiche s'iniziano (colla considerazione delle trasformazioni razionali degli integrali ellittici) nel 1827; seguono le « Notices » nei volumi 3 e 4 del Giornale di Crelle, senza dimostrazione, poi la classica Memoria « *Fundamenta nova theoriae functionum ellypticarum* » del 1829, ove si adoperano le famose *serie theta*. Morto Abel, Jacobi resta solo a spingere avanti questo ordine di ricerche. Egli comprende tutto il valore del grande teorema cui ha dato appunto il nome di Abel e, con intuito di genio, ne trae la soluzione del problema d'inversione per gl'integrali iperellittici, dove s'introducono *funzioni* di due variabili, quattro volte periodiche, ch'egli ha pure chiamato *abeliane* (1832, 1834-35, 1837-38).

Sebbene ei non avesse una rappresentazione sufficiente delle funzioni nel campo della variabile complessa, Jacobi scopre qui l'essenziale, e indovina anche che le nuove funzioni dovrebbero esprimersi per mezzo delle *serie theta con più variabili,* di cui ha costruito la forma generale. Qui sta il punto di partenza dei lavori di Rosenhain e di Göpel (1846 e 1847), il primo dei quali risponde ad una questione posta a premio dall'Accademia di Parigi; e quindi anche l'impulso alle ricerche più generali e profonde che dovevano proseguirsi in questo campo da Weierstrass e da Riemann.

BIBLIOGRAFIA

Jacobi Carolus Gustavus, *Mathematische Werke,* 3 voll. Berlino, 1846-71.

« Königsberger Festschrift », *C. G. Jacobi.* Lipsia, 1904.

6. - Riemann e Weierstrass

L'eredità del pensiero di Abel e di Jacobi da una parte, e d'altra parte di Cauchy, viene raccolta specialmente da due uomini assai diversi d'ingegno e di fortuna, che fondano la moderna teoria delle funzioni e costruiscono insieme la più generale dottrina di quelle trascendenti che vedemmo nascere dagli integrali di differenziale algebrico.

Bernardo Riemann, il più giovane dei due, ma scomparso quarant'anni prima dalla scena del mondo, è, come Abel, figlio di un pastore luterano e nasce a Breselenz nello Hannover, il 7 settembre 1826. Fin da ragazzo è malaticcio e melanconico. Nel 1846 va studente all'Università di Gottinga, col proposito di studiare teologia, ma passa presto alle matematiche. Solo indirettamente egli potè subire l'influenza dell'inaccessibile Gauss. A 19 anni e mezzo leggeva già i classici, Eulero e Lagrange. Di lui studente il prof. Stern ha detto poi a F. Klein: « Riemann cantava già allora come un canarino ». Da Gottinga, nella Pasqua del 1847, R. passa a Berlino, dove ascolta le lezioni di Jacobi e di Dirichlet; ma torna a Gottinga nel 1849 e quivi trova una paterna amicizia in Weber. Più tardi, dopo la morte di Gauss, vi consegue la cattedra, nel 1857. Disgraziatamente, nel 1862, poco tempo dopo essersi sposato, R. si ammala in seguito ad un forte raffreddore. È tisico e viene in Italia a cercarvi la salute. Invano! La sua vita si spegne a quarant'anni sul Lago Maggiore, il 20 luglio 1866.

Il suo soggiorno a Pisa ha lasciato quivi un ricordo, specie per l'amicizia che lo legò allora ad Enrico Betti, direttore di quella Scuola Normale. Si parlava degli sforzi che faceva il matematico malato per tenersi desto al lavoro: talvolta ei sarebbe giunto a tenere i piedi in un catino d'acqua fredda. Se è vero, non era certo il modo di vincere la malattia polmonare che lo minava.

Assai più fortunata è stata la vita di Weierstrass.

Carlo Weierstrass è nato a Ostenfeld nel Münsterland il 31 ottobre 1815 (dunque 11 anni prima di Riemann). Il padre era passato al cattolicismo, e nei circoli cattolici crebbe egli insegnando poi in un proginnasio cattolico (1842-48). Dal 1834 al 38, Weierstrass studiò all'Università di Bonn ma, almeno da principio, non Matematiche, bensì giurisprudenza. Fu poi attratto dai *Fundamenta nova* di Jacobi, lavoro apparso nel 1829, ch'egli riuscì ad affrontare e approfondire senza un'adeguata preparazione. Quindi fu discepolo di Gudermann all'Accademia di Münster (1839-40). E nel 1841 con-

seguì il diploma di « Oberlehrer » con uno scritto, contenente idee originali, sullo sviluppo delle funzioni modulari.

I suoi lavori degli anni successivi levano alto il suo nome, sicchè nel 1854 viene nominato dottore *honoris causa* dell'Università di Königsberg e nel '56 è chiamato all'Università di Berlino. Quivi è vissuto a lungo, universalmente onorato, ma chiudendo sempre più i risultati dei suoi studi nella cerchia degli amici discepoli, poichè si sviluppò in lui una vera fobìa della pubblicazione. Morì a 81 anni, il 17 febbraio 1897.

I principii della teoria delle funzioni di Weierstrass si trovano nei suoi lavori del 1842 e 43, il primo dei quali contiene già l'idea del prolungamento analitico, di cui si è discorso nel § 3; degli integrali iperellittici (del genere due) comincia egli ad occuparsi nel 1849, e nel 1854 giunge all'inversione degli integrali iperellittici di genere p qualunque.

Frattanto Riemann, che aveva pubblicato i suoi « Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabile complessa » nel 1851, dà alla luce la sua grande Memoria sulle funzioni abeliane del 1857. Weierstrass appare come sbigottito dalla copia d'idee nuove ed imprevedute che vengono affacciate dal suo emulo. La realizzazione del suo proprio programma di sviluppo della dottrina subisce quindi un arresto: la teoria più generale delle funzioni (abeliane) n volte periodiche di $2n$ argomenti compare nelle sue Memorie del 1869 e 1876 e 1880, e si trova svolta nelle « Lezioni » del 1875 e 76, mentre la nuova sistematica delle funzioni ellittiche è data nelle « Lezioni » del 1882; questi due corsi di lezioni fanno oggetto di pubblicazione postuma nelle Opere (T. IV, 1902, e V, 1915).

Tanto Weierstrass che Riemann hanno ricevuto impulso da Jacobi. Ma il secondo ha svolto la sua attività in un senso molto più libero, conforme al suo genio sintetico che si compiaceva meglio d'idee che di calcoli. Weierstrass ha assunto a compito della sua vita di costruire una teoria delle funzioni basata sopra la definizione di esse mediante serie di potenze (prolungabili, come si è detto), e perciò una teoria che può dirsi aritmetica. Egli riprendeva così il concetto delle *funzioni analitiche* di Lagrange, e su questa base si proponeva di costruire un edificio impeccabile, strettamente rigoroso e sen-

za lacune. La cura della compiutezza dava alle sue lezioni un carattere classico, sebbene esse restassero un po' chiuse nella cerchia delle idee personali. I suoi discepoli manifestavano la loro convinta soddisfazione. Per loro anzi il nome del maestro fu innalzato anche nei confronti di Riemann, cui si guardava spesso con occhio critico rimproverandogli qualche lacuna; ma — a dir vero — l'ingegno chiaro e diritto di Weierstrass non può essere paragonato al genio di Riemann, fecondo delle idee più potenti ed originali: dal quale, in gran parte, dipendono gli sviluppi ulteriori delle matematiche pure in diversi indirizzi. Nondimeno la teoria delle funzioni ellittiche ed abeliane ha ricevuto da Weierstrass una importante trattazione: anzi le funzioni ellittiche vengono anche oggi presentate, generalmente, secondo il suo sistema [1]: dove si mette a fondamento la costruzione delle trascendenti intere in rapporto ai loro zeri, mediante prodotti infiniti; c'è qui un teorema molto notevole che, prima di Weierstrass, era stato scoperto dal Betti [2] e che il matematico pisano, con singolare disinteresse personale, non volle rivendicare.

In contrapposto alla teoria aritmetica delle funzioni di Weierstrass, la teoria di Riemann può dirsi in un certo senso *fisica*, perchè si ispira prima di tutto alle concezioni della fisico-matematica, che costituì l'interesse dominante dell'erede di Gauss. Il significato fisico della teoria delle funzioni di Cauchy attrasse infatti l'attenzione di Riemann: in primo luogo le condizioni di monogeneità (§ 3) portano che la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di una funzione di variabile complessa, $u+iv=f(x+iy)$, debbano soddisfare all'equazione alle derivate parziali

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta_2 v = 0,$$

che s'incontra in diversi campi della fisica matematica.

---

(1) Cfr. p. es. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*. Pisa, Spoerri, 1901.

(2) *La teoria delle funzioni ellittiche*, in « Annali di Mat. », 1862 (Opere, I, 228).

D'altronde, chi guardi alla condizione d'integrabilità delle predette funzioni (indipendente dal cammino d'integrazione) è indotto a pensare alla questione analoga che si presenta nella teoria del potenziale, ove si tratta appunto di riconoscere se il lavoro di un dato sistema di forze, nel passaggio di un punto da una posizione ad un'altra, riesca indipendente dal cammino percorso dal punto. Precisamente la funzione di variabile complessa $u+iv=f(x+iy)$ mette in evidenza due distribuzioni di forza colle componenti $(u, -v)$ e (v, u), che provengono da un potenziale.

Il ravvicinamento colla fisica porge a Riemann non soltanto un motivo d'interessamento alla teoria delle funzioni di variabile complessa, sì anche una nuova posizione di problemi: sorgono così le questioni di *esistenza* che egli fa dipendere dal cosidetto *principio di Dirichlet*, che ogni area semplicemente connessa si può rappresentare conformemente (cioè in modo da conservare gli angoli) sopra un'altra; un principio che conserva il suo immenso valore se pure convenga di limitarlo o di precisarlo riferendosi a contorni che soddisfano ad opportune condizioni di continuità, ecc.

Anche dalla veduta fisica si può dire suggerita la felice idea di Riemann di definire la funzione nel piano della variabile complessa, in rapporto ai suoi *punti singolari*: i quali vengono ora debitamente analizzati e classificati (poli, punti singolari essenziali, punti di diramazione, ecc.).

Ma accanto alle concezioni di origine fisica giuocano nella teoria di Riemann le concezioni geometriche, ed anche quelle più strettamente analitiche. Accenniamo almeno alla rappresentazione delle funzioni polidrome mediante superficie più volte connesse (le cosidette *superficie di Riemann*), per cui la teoria di esse, e in particolare la teoria delle funzioni algebriche, è venuta ad apparire strettamente connessa coi problemi dell'Analysis situs, o topologia: un nuovo ramo delle scienze matematiche che di qui riceve straordinario impulso, onde esso viene proseguito nelle ricerche di Enrico Betti (scoperta dei « numeri di Betti » per le varietà a più dimensioni), Poincaré, Heegard, fino alla scuola dei geometri americani contemporanei: Verlen, Alexander e Lefschetz.

BIBLIOGRAFIA

RIEMANN BERNHARD, *Vorlesungen über die allgemeine Theorie der algebraischen Differentiale*. Gottinga, 1892-93.

Gesammelte Mathematische Werke, un vol. *Nachträge herausgegeben von M. Nöther und U. Wirtinger*. Lipsia, 1902.

Oeuvres mathématiques, trad. Laugel avec une préface de U. Hermite et un discours de U. F. Klein. Parigi, Gauthier et Villars, 1898.

WEIERSTRASS KARL, *Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Transzendenten*, in « Mathematische Werke ». Berlino, IV, 1902.

7. - INTEGRAZIONE QUALITATIVA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L'imponente sviluppo della teoria delle funzioni di variabile complessa, nei lavori di Riemann e Weierstrass, ha esercitato in più sensi un vasto influsso sui matematici di tutto il mondo. Alcuni scolari di Riemann, come Clebsch (e poi Nöther) hanno svolto l'interpretazione dei suoi resultati nel campo algebrico-geometrico, riuscendo così a fecondare la nuova geometria proiettiva delle curve, di cui avremo occasione di discorrere. FUCHS prosegue direttamente il programma riemanniano insegnando ad integrare una larga classe di equazioni differenziali lineari, a coefficienti razionali, mercè l'analisi delle singolarità che codesti integrali possono presentare nel piano della variabile complessa. In Italia BETTI e CASORATI svolgono in vari sensi la dottrina. Ma il maggior centro del suo sviluppo diviene negli anni dopo il 1870, la Francia, per opera di HENRI POINCARÉ e di EMILE PICARD. Qui soprattutto si prosegue lo studio della integrazione qualitativa delle equazioni differenziali, mercè l'analisi delle singolarità degli integrali: l'ultimo frutto di tali ricerche sembra esser dato dalle «Lezioni di Stoccolma» di PAUL PAINLEVÉ. Ma conviene almeno citare, in quest'ordine d'idee, la teoria delle funzioni automorfe (funzioni che si riproducono per un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari) per opera di KLEIN e di POINCARÉ [1]. C'è qui una vera generalizzazione delle funzioni ellitti-

---

[1] HENRI POINCARÉ — cugino dell'avvocato Raimondo, che è salito alla presidenza della Repubblica Francese — è nato a Nancy nel 1854

che, che — a differenza delle funzioni abeliane — ci lascia nel campo delle funzioni d'una variabile, e si è condotti alla scoperta importante che ogni relazione algebrica fra due variabili $(f(xy)=0)$ può essere uniformizzata, cioè risoluta esprimendo x ed y mercè funzioni uniformi di un parametro.

BIBLIOGRAFIA

Le memorie fondamentali di L. FUCHS sulla teoria delle equazioni differenziali lineari si trovano nel *Giornale di Crelle*, T. 66, 68 (1865-68). Le memorie di H. POINCARÉ sulle funzioni automorfe (fuchsiane, kleiniane) negli *Acta mathematica*, vol. I-VII (1882-84). Cfr.:

POINCARÉ HENRI, *Oeuvres*, in corso di pubblicazione: sono usciti 3 vol. Parigi, 1916-34.

Per l'opera di Klein in questo stesso campo:

KLEIN FELIX, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 3 vol. Berlino, 1921-23 (vol. III).

Si veda in particolare il *Carteggio Klein-Poincaré*, ibidem, T. III, pag. 587.

Trattati principali sulle funzioni automorfe:

R. FRICKE e F. KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*. 3ª ed. Lipsia, 1912.

G. FUBINI, *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*. Pisa, 1908.

G. GIRAUD, *Leçons sur les fonctions automorphes*. Parigi, 1920.

Cfr.:

P. KOEBE, *Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung*, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung*, pag. 157-163 (1912).

R. FRICKE, *Automorphe Funktionen mit Einschluss der elliptischen Modulfunktionen*, in « Enc. der math. Wiss ». III B 4 (1913).

---

e morto a Parigi nel 1912. Allievo dell'École Politéchnique (1873-75) e poi dell'École des Mines (1876-79), conseguì il titolo di dottore in matematiche nel 1879 e fu subito incaricato dell'insegnamento dell'Analisi alla facoltà di Scienze di Caën. Nel 1881 viene chiamato a Parigi come « maître de conferences » e nel 1886 diventa ivi professore titolare. L'anno appresso entra nell'Istituto. I vari aspetti della sua opera multiforme trovansi studiati da V. VOLTERRA, J. HADAMARD, P. BOUTROUX nel volume *Henri Poincaré*. Parigi, 1914.

Cfr. l'*Éloge historique* di G. DARBOUX nel vol. II delle *Oeuvres*.

Per gli sviluppi di Fuchs, Poincaré, Picard, Painlevé, sull'integrazione qualitativa delle equazioni algebrico-differenziali, vedi:

E. PICARD, *Traité d'Analyse*, vol. III, 3ª ed., 1928.

P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles*, litografate. Parigi, 1897.

8. - GRUPPI CONTINUI DI TRASFORMAZIONI DI SOPHUS LIE

Abbiam visto la teoria delle funzioni di variabile complessa legata, nelle sue origini, col problema della classificazione degli integrali (integrali algebrico-logaritmici, ellittici, ecc.) dar luogo poi ad una dottrina qualitativa delle equazioni differenziali. Lo stesso pensiero che sta alla base della costruzione della teoria della risolubilità delle equazioni algebriche, o della riducibilità, e quindi della classificazione, degli integrali (integrali algebrico-logaritmici, ellittici, ecc.), si esprime anche con una teoria generale che porta a classificare le equazioni differenziali (o a derivate parziali) in ordine alla difficoltà di integrazione o alla loro riducibilità ad equazioni di dati tipi, in particolare alle quadrature, ecc. Vogliamo accennare agli studi sulle equazioni differenziali di Sophus Lie e alla teoria dei gruppi continui di trasformazioni, che vi si collega.

Per spiegare i principii di queste teorie, riferiamoci al caso più semplice delle equazioni differenziali del 1° ordine.

Una equazione di questo tipo si lascia interpretare nel piano delle variabili x e y, come una corrispondenza per cui ad ogni punto del piano viene associata una retta (direzione) uscente da esso: integrare l'equazione vuoi dire trovare le linee descritte da un punto che si muova nel piano seguendo, in ogni istante, la direzione associata. In tal guisa riesce intuitivo che l'equazione ammette un fascio di linee integrali: c'è precisamente una linea per ogni punto generico del piano (dove l'equazione sia regolare).

Questa rappresentazione geometrica si dà in generale per una qualsiasi equazione differenziale del 1° ordine, ed in particolare per l'equazione del tipo $y'=f(x)$ che s'integra con una quadratura, avendo come linee integrali le

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x) \cdot dx + \text{Cost.}$$

Ma in questo secondo caso si può mettere in evidenza un circostanza notevole: il fascio delle linee integrali è trasformato in sè stesso da una traslazione parallela all'asse y:

$$y = z + \text{Cost.}$$

Questa osservazione suggerisce l'idea di studiare, in genere per una qualsiasi equazione differenziale del 1° ordine se il fascio delle sue linee integrali ammetta in modo analogo delle trasformazioni in sè stesso, e più in generale i sistemi di trasformazioni puntuali del piano che possono trasformare in sè un'equazione differenziale d'ordine qualunque.

Sistemi siffatti godono della proprietà che, eseguendo successivamente due trasformazioni del sistema, si ottiene sempre una trasformazione dello stesso sistema, cioè le trasformazioni (considerate come operazioni in un senso affatto analogo alle sostituzioni sopra n lettere) formano un *gruppo*.

Si ha così una importante estensione dei concetti che stanno alla base della teoria delle equazioni algebriche di Galois: là si tratta di gruppi costituiti di un numero finito di operazioni, qui invece di gruppi contenenti, non solo infinite operazioni, ma *continui* (1). Gruppi siffatti ci sono offerti già da semplici esempi geometrici: gruppi di movimenti del piano e dello spazio, gruppi di omografie, ecc.

Sophus Lie ha sviluppato la teoria generale di tali gruppi continui, mostrando il profitto che si può trarne per la dottrina dell'integrazione delle equazioni differenziali (e a derivate parziali). Per dare almeno un esempio, ritorniamo alle equazioni differenziali del 1° ordine, di cui si è discorso innanzi. Quale è la condizione perchè esse possano integrarsi con una semplice quadratura? Si tratta di vedere se l'equa-

---

(1) Gruppi infiniti *discontinui* compaiono invece nelle ricerche di F. Klein sulle funzioni modulari-ellittiche e nella teoria delle funzioni automorfe (§ 7).

zione possa trasformarsi con una trasformazione puntuale in un'equazione del tipo $y' = f(x)$ le cui linee integrali sono trasformate l'una nell'altra dalle traslazioni del gruppo $Y = y + Cost.$

Dunque la condizione di integrabilità per quadrature di un'equazione differenziale del 1° ordine, consiste in ciò: che l'equazione deve essere trasformata in sè stessa da un gruppo semplicemente infinito di trasformazioni puntuali, un tal gruppo potendo sempre ridursi alla forma normale di un gruppo di traslazioni.

Coll'applicazione dei criterii gruppali Lie ritrova a priori, in modo sistematico, tutti i tipi noti di equazioni integrate con artifici particolari. E fa vedere che le circostanze di riducibilità di un'equazione differenziale qualsiasi, dal punto di vista della sua integrazione, dipendono dall'esistenza di gruppi continui di trasformazioni per cui l'equazione è invariante, e dalla struttura di tali gruppi. Qui c'è il principio di una teoria classificatoria delle equazioni differenziali (e a derivate parziali) che Lie ha svolto brillantemente, pervenendo a resultati generali ed importanti.

La concezione di Lie non è la sola che colleghi lo studio delle equazioni differenziali ai gruppi continui di trasformazioni.

Un altro collegamento pieno d'interesse è stato indicato da E. Picard per le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali (nella variabile indipendente). Un'equazione lineare omogenea d'ordine n, possiede n integrali linearmente indipendenti per mezzo dei quali l'integrale generale si esprime linearmente. Ora, se si gira intorno ai punti singolari nel piano della variabile complessa, i nominati n integrali indipedenti subiscono una sostituzione lineare. E tutte queste sostituzioni lineari sono contenute in un gruppo continuo algebrico, che il Picard definisce a priori(in modo analogo al gruppo di un'equazione algebrica), e che egli chiama il *gruppo di razionalità* dell'equazione. Per un'equazione di tipo generale il gruppo di razionalità è il gruppo totale (contenente tutte le sostituzioni lineari omogenee su n variabili) ed allora (per $n > 1$) l'integrazione dell'equazione non si lascia in alcun

modo ridurre a problemi più semplici. Ma a gruppi di struttura particolare corrispondono invece equazioni, in qualche modo riducibili. In ispecie si trova la condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione possa integrarsi con n quadrature successive (VESSIOT, 1891). Si ha così, sia pure in un campo più limitato, un resultato tanto più importante quanto più netto e preciso.

BIBLIOGRAFIA

S. LIE e F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*. 3 vol. Lipsia, 1888-93 (rist. 1930).

S. LIE e G. SCHEFFER, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*. Lipsia, 1891.

Vorlesungen über continuirliche Transformationsgruppen. Lipsia, 1893.

S. LIE, *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di F. Engel, in corso di pubblicazione. Lipsia, 1922-34.

E. PICARD, *Traité d'Analyse*, T. III, cap. XVII.

9. - GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Nelle pagine precedenti abbiamo presentato una serie di sviluppi delle Matematiche pure, che procedono da uno stesso motivo: in luogo di cercare la risoluzione di un problema con dati mezzi, supposti idonei a priori, si pone la domanda pregiudiziale della risolubilità, trasportando così l'indagine quantitativa sul terreno qualitativo e classificatorio.

Ma non tutti gli sviluppi matematici del secolo decimonono esprimono questo motivo; e — com'è naturale — anche i rami delle matematiche che da esso traggono origine vengono ad interferire con altri rami, aventi un'origine diversa, di guisa che i progressi dell'uno appariscono intrecciarsi ai progressi dell'altro. Così, ad esempio, gli sviluppi di Sophus Lie nella teoria dei gruppi e delle equazioni differenziali non s'intendono senza il precedente sviluppo della geometria differenziale e della geometria in generale, che costituisce appunto la base dell'edifizio costruito dal geometra norvegese. Anche la storia dell'evoluzione personale della sua mente conferma questo giudizio.

SOPHUS LIE [1] è nato a Nordjordeidet in Norvegia il 17 decembre 1842. Studente di scienze naturali ed esatte all'Università di Cristiania, ha passato varii anni senza trovare una propria via, finchè la lettura delle opere di Poncelet e di Plücker gli ha dato la rivelazione quasi improvvisa del suo genio geometrico. In particolare da questi autori egli ha attinto l'uso dell'immaginario in geometria, che caratterizza alcuni suoi lavori bellissimi. Un viaggio scientifico intrapreso nel 1869-70 ha avuto poi, sullo sviluppo delle idee del Lie, un influsso decisivo. In questo viaggio il Lie ha incontrato a Berlino F. Klein e con lui è andato a Parigi, ove ha potuto avvicinare C. Jordan. Con Klein stesso ha pubblicato una Nota sulle curve che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive, in cui si può ravvisare l'inizio dei suoi studi più generali su gruppi continui di trasformazioni e le equazioni differenziali, che costituiscono l'opera della sua vita.

Ritorniamo alla geometria differenziale per cercare di spiegarne in breve i concetti e i motivi fondamentali. Anzitutto convien dire che questo studio si presenta come il naturale prolungamento delle applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale, connesse alla stessa nascita di questo Calcolo. Proprio sotto il nome di « Application de l'analyse à la géométrie » compare, nel 1795, il trattato di geometria analitica dello spazio di Monge, che dà particolare risalto alle relazioni differenziali.

GASPARD MONGE (1746-1818), l'organizzatore dell'École polytechnique di Parigi, sia direttamente sia indirettamente, attraverso l'opera dei suoi discepoli (CH. DUPIN, L. CARNOT, V. PONCELET) ha esercitato sulla geometria in generale il più profondo impulso rinnovatore. Le applicazioni del Calcolo, che costituiscono propriamente la geometria differenziale, concernono in primo luogo la teoria della superficie. Monge illustra col problema geometrico la teoria delle equazioni alle derivate parziali del 1° ordine di Lagrange; vengono

---

[1] Cfr. F. ENGEL, *Zur Erinnerung an S. Lie*, « Atti Acc. Scienze di Lipsia », 1899.

messe in luce le famiglie di linee notevoli sopra la superficie, in particolare le linee di curvatura, cui si riferiscono noti sviluppi di Dupin, e vien posto anche il problema delle superficie applicabili.

GAUSS ha recato a questo problema il più importante contributo colla scoperta della curvatura totale, invariante per flessioni senza estensione della superficie. E, in generale, si può dire che la geometria differenziale delle superficie, fondata nella scuola francese, ebbe da Gauss il più fecondo sviluppo colla celebre memoria « Disquisitiones circa superficies curvas » del 1827. Qui conviene notare che lo studio della teoria delle superficie presenta a Gauss un interesse non soltanto matematico, ma applicativo, come fondamento della geodesia teorica.

Che cosa sia divenuta, dopo Monge e Gauss, la geometria differenziale, arricchendosi dei più bei resultati, ognuno può vedere oggi dalla lettura di un trattato di questa scienza. Qui basterà accennare all'importanza che tale ordine di questioni prende, con Riemann, per la critica dei principii della geometria e d'altra parte citare i due grandi trattati che hanno acquistato giustamente la più alta fama:

GASTON DARBOUX, « Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitesimal », 4 vol. Parigi, 1894-914.

LUIGI BIANCHI, « Lezioni di geometria differenziale », 2 vol., 3ª ed. Bologna, Zanichelli 1927.

A dir vero, neppur questi trattati esauriscono la disciplina, poichè bisogna almeno aggiungervi gli sviluppi che procedono dal cosidetto *calcolo assoluto* di GREGORIO RICCI, in connessione colla teoria della relatività. Si tratta di un algoritmo che, in rapporto colle concezioni di Riemann, insegna a operare sistematicamente sopra una superficie o varietà a più dimensioni, con operazioni *invarianti* e *covarianti* rispetto a trasformazioni *per applicabilità*. Questo calcolo è stato ricostruito (sulla base di una nuova nozione del *parallelismo*) da:

T. LEVI-CIVITA, « Lezioni di Calcolo differenziale assoluto ». Roma, Stock 1925.

Citiamo infine i più recenti indirizzi della geometria proiettiva differenziale, che prendono origine da alcune osservazioni di CORRADO SEGRE e vengono sviluppati dai geometri contemporanei (G. FUBINI, E. BOMPIANI, T. TERRACINI, ecc.):

G. FUBINI e E. CECH, « Geometria proiettiva differenziale ». Bologna, 1926-27.

Capitolo II.

LA CRITICA DEI PRINCIPII E LA TEORIA DELLE FUNZIONI DI VARIABILE REALE

10. - Critica dei principii dell'analisi infinitesimale

Nello sviluppo della geometria differenziale, con Monge, vediamo proseguirsi lo spirito creatore del Calcolo infinitesimale, che trae i suoi progressi da una feconda intuizione geometrica. Per contro l'esigenza del rigore suscita un movimento critico che tende ad emanciparsi dall'intuizione e a dare a tutto l'edificio del Calcolo una sistemazione logica.

Le difficoltà e le contraddizioni che s'incontrano proprio alla base del Calcolo, coi concetti d'infinito e d'infinitesimo, urgevano più acutamente sugli spiriti matematici alla fine del secolo decimonono, proprio quando gli straordinari progressi conseguiti avevano accresciuto la fiducia nel valore della nuova costruzione. Come abbiamo ricordato nel § 33 del Libro primo, D'Alembert aveva espresso questa fede nella famosa risposta ad uno studioso che gli manifestava i suoi dubbi: « Allez de l'avant, la foi vous viendra! ». Ma Lagrange tentava di ricostruire tutto il Calcolo in un senso puramente algebrico, partendo dalla sua definizione delle funzioni analitiche come serie di potenze. Poi, nell'occasione di un premio dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di cui lo stesso Lagrange era presidente, sembrava formarsi un ambiente di reazione alle nuove idee, in cui l'esigenza del rigore stesse per sopraffare quei metodi fecondi che già si erano rivelati come il più possente istrumento dei progressi della scienza. Ma si manifestò subito una contro-reazione, quale si esprime nelle eccellenti « Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal » di L. Carnot, pubblicate nel 1797.

LAZARE CARNOT è nato a Nolay sulla Costa d'Oro il 13 marzo 1753. Partecipa alla rivoluzione e organizza la vittoria della Francia repubblicana nelle ore difficili del 1793-94; poi si trova nel Direttorio accanto a Napoleone, ma viene cacciato il 4 settembre 1796, sottraendosi alla deportazione colla fuga. Più tardi, al tempo della Restaurazione, è nuovamente espulso dai Borboni come regicida e muore esule a Magdeburgo il 2 agosto 1823. L'ardente giacobino, lavorando alle « Réflexions » sopra citate, si consolava nell'esilio colle alte speculazioni matematico-filosofiche.

Parlando delle quantità infinitesime, Carnot dice: « on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traitées comme absolument nuls, et semblent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant ». Ma aggiunge in una nota: « Je parle ici conformément aux idées vagues qu'on se fait des quantités dites infinitésimales....; mai dans le vrai, rien n'est plus simple que l'exacte notion de ces sortes de quantités »; una tale quantità non è altro che « une quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation ».

Carnot possedeva dunque una chiara veduta di ciò che costituisce il vero significato del Calcolo infinitesimale, ed era sulla giusta strada che doveva conferire solidi fondamenti a questo ramo delle matematiche, anche se non si è spinto egli stesso fino alla sua sistemazione. Della quale si riconosce l'onore a CAUCHY [1].

Cauchy svolge in modo sistematico, con forma compiuta e rigorosamente deduttiva, i fondamenti dell'analisi, chiarendo l'infinitesimo come *passaggio al limite* e definendo la continuità delle funzioni in maniera aritmetica, indipendente dall'intuizione geometrica. Egli assegna inoltre i principali criterii per la convergenza delle serie. Convien dire tuttavia

---

[1] *Cours d'Analyse* (*Analyse algébrique*), 1821; *Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal*, 1823.

che, per alcuni di questi concetti, egli ha avuto, senza saperlo, dei precursori (GAUSS, 1812, e BOLZANO, 1817) e che, per quel che concerne la convergenza della serie, gli mancò la nozione della *convergenza uniforme,* che appartiene ad ABEL (1826).

Cauchy porge anche la prima definizione generale dell'*integrale,* ch'egli basa sul procedimento analitico adoperato in molti casi da MENGOLI [1]. E dimostra quindi l'applicabilità del metodo alle funzioni considerate a priori interessanti, cioè alle funzioni continue o aventi un gruppo non denso di punti di discontinuità. RIEMANN procederà su questa via.

La spinta data da Cauchy alla trattazione rigorosa del Calcolo infinitesimale si prosegue con ritmo accelerato nei progressi del secolo. Una volta ammesso che i principii dell'Analisi debbano fondarsi su definizioni analitiche affatto indipendenti dall'intuizione, ne veniva la conseguenza che si dovevano sottoporre a revisione tutti i presupposti adoperati nell'insegnamento del Calcolo. In particolare, per esempio, l'esistenza della derivata appariva come un postulato, di cui si riconobbe che non consegue affatto dall'ipotesi della continuità. WEIERSTRASS (1861) ha dato, per la prima volta, un esempio di funzione continua che non ha derivata in nessun punto dell'intervallo in cui è definita.

Così, nella seconda metà del secolo decimonono, i matematici hanno elaborato una nuova trattazione pienamente rigorosa del Calcolo; Weierstrass in Germania e DINI [2] in Italia, sono gli autori e i maestri di questa scuola critica onde è uscita la nuova teoria delle funzioni di variabile reale.

Il movimento critico così suscitato, che risponde d'altronde ad intime condizioni dello sviluppo della scienza, invaderà rapidamente tutto il mondo. Due punti almeno me-

---

[1] *Geometria speciosa.* Bologna, 1659.

[2] ULISSE DINI di Pisa (1845-1918) è stato professore universitario nella città natale per oltre 50 anni, ed anche direttore di quella Scuola Normale Superiore. A lui si riattaccano gli studi critici dei discepoli Volterra, Arzelà, Ascoli, ecc. Solo fra i critici italiani si trova fuori della sua Scuola G. Peano, che più direttamente va collegato a Genocchi, a sua volta discendente da Lagrange e da Cauchy.

ritano la nostra attenzione. La critica mirante a stabilire i principii dell'Analisi doveva naturalmente far capo al concetto stesso del numero e in particolare del numero irrazionale. La nuova teoria di questi numeri, costruita da R. DEDEKIND (1872) [1], metterà in evidenza un postulato di continuità della retta (o delle grandezze) che si riconosce esplicitamente al termine di una lunga evoluzione storica delle idee.

11. - IL CONCETTO DI FUNZIONE

L'altro punto, a cui si è alluso, è la definizione più che generale della *funzione di variabile reale* secondo Dirichlet. Anche qui la definizione conchiude una lunga serie di dubbi, di discussioni e di sviluppi.

Per chiarire il resultato raggiunto conviene prender le mosse un po' lontano, spiegando meglio il concetto della funzione che si aveva nel secolo decimottavo, cui pure si è accennato nel Libro I.

Il vocabolo « funzione », nel suo significato matematico, compare per la prima volta in uno scritto di LEIBNIZ del 1692. Alcuni anni dopo G. BERNOULLI definisce come *funzione di una grandezza variabile* una quantità composta in un modo qualunque con questa grandezza e con delle costanti. EULERO precisa la definizione dicendo che la funzione è una « espressione di calcolo » composta in qualunque modo colla variabile e con certe date costanti. Si riteneva pertanto, in rapporto alla geometria analitica di Fermat e di Descartes, che ogni funzione rappresenti una curva; ma, viceversa, il concetto di curva pareva più generale di quello di funzione: perchè soltanto una curva descritta con *legge* geometrica o meccanica doveva dar luogo ad una funzione, mentre si possono immaginare *curve arbitrarie* descritte *senza legge,* che sembrava impossibile di rappresentare con una funzione.

Questa veduta, se pure imprecisa ed erronea, non cessa di avere un significato. La correzione è venuta dal problema

---

[1] *Continuità e numeri irrazionali.* Trad. dal tedesco con note per cura di O. ZARISKI. Bologna, Zanichelli, 1926.

delle *corde vibranti*. Studiando le vibrazioni di una corda elastica, D'ALEMBERT (1747) riusciva ad integrare la corrispondente equazione alle derivate parziali del 2° ordine, dando come integrale generale $y=f(at+x)+f(at-x)$: f rappresenta qui una funzione arbitraria periodica, di periodo eguale al doppio della lunghezza della corda. Poco dopo (1753) DANIELE BERNOULLI dava una nuova soluzione del problema mediante una serie trigonometrica, che decompone la vibrazione in una serie di vibrazioni elementari corrispondenti ai suoni semplici (le quali si esprimono, con Taylor, mediante seni e coseni di archi multipli). Ma questa deduzione veniva contestata da Eulero e da D'Alembert: l'integrale di Bernoulli, dicevano, non può esser l'integrale generale, altrimenti una curva arbitraria, corrispondente alla posizione iniziale della corda, dovrebbe potersi rappresentare con una serie trigonometrica. La serie trigonometrica esprime una legge analitica, perciò sembra a priori assurdo che essa possa rappresentare una linea arbitraria, per esempio composta di più tratti di rette o di curve diverse (la quale dovrebbe rispondere non ad una, bensì a diverse leggi di generazione).

Ma, a correggere tali vedute, venivano le scoperte di FOURIER nella *teoria del calore* (1807 e seg.): una linea composta di tratti paralleli e distinti si può rappresentare con una serie trigonometrica. Così il problema di rappresentare una linea arbitraria con una serie trigonometrica non sembra più assurdo. Anzi Fourier tenta di risolverlo, riprendendo all'uopo un metodo già escogitato da Eulero (1777) mediante il quale calcola i coefficienti della serie cercata. Fourier non dimostra, a rigore, che questa serie risolva effettivamente il problema, ma — in uno stadio precritico delle idee — la sua costruzione appare quasi una dimostrazione, e del resto le numerose applicazioni della serie di Fourier, alimentavano la fiducia nel resultato. Con qualche opportuna restrizione il teorema di Fourier fu provato rigorosamente da DIRICHLET nel 1829. E da questi studi Dirichlet fu condotto a introdurre la sua celebre definizione: « funzione di una variabile x, in un certo campo, è una quantità y che assuma per ogni valore della x un valore ben determinato ». S'intende che il

valore della y, corrispondente ad un dato x, può essere tratto da un calcolo o da una legge o da una convenzione arbitrariamente fissata. (Per esempio si ha una funzione facendo corrispondere ad ogni valore di x, in un certo intervallo, il valore 0 o 1 secondochè x è un numero razionale o irrazionale). È chiaro che le funzioni di variabile reale così definite non hanno a soddisfare a priori ad alcuna condizione di continuità: le funzioni continue apparendo come casi particolarissimi delle funzioni arbitrarie. A maggior ragione una funzione arbitraria non rappresenterà, in generale, una curva nel senso intuitivo della parola. Tutto ciò che l'intuizione attribuisce alle funzioni, come rappresentative delle curve, resta pertanto senza valore: indicando solo delle restrizioni o dei postulati che converrà aggiungere alla definizione per considerare funzioni veramente importanti.

Così si troveranno esempi caratteristici di funzioni per cui viene meno, in diversi modi, qualcuna delle associazioni di proprietà che ricorrono nei casi corrispondenti alla comune intuizione.

Ma la teoria delle funzioni di variabile reale non conduce soltanto a resultati negativi, risolvendosi in una pura teratologia. I mostri ci fanno meglio comprendere la vita degli organismi normali. Citiamo alcuni teoremi di evidente interesse.

Una funzione continua in un certo intervallo ammette un'espressione analitica mediante una serie di polinomi (Weierstrass, 1885).

Il concetto della curva piana continua, definita mediante la rappresentazione con due funzioni continue di un parametro, può essere precisato come segue. Premettiamo che una curva così definita può riempire un quadrato, siccome ha mostrato G. Peano (1890). La definizione, dunque, non risponde a priori a quegli attributi intuitivi per cui pensiamo una «linea» come «limite di una superficie». Ma C. Jordan ha tratto dalla critica un resultato positivo. Pongasi che le funzioni del parametro riprendano lo stesso valore agli estremi dell'intervallo in cui sono date, di guisa che la *curva* rappresentata sia *chiusa*. Allora, *se non vi sono punti doppi*, in

modo che il parametro sia, a sua volta, funzione (univoca) delle coordinate del punto variabile, la curva *divide il piano in due parti,* ed appare quindi come limite comune di due superficie, interna ed esterna: non si può passare da un punto interno ad uno esterno mediante un cammino continuo, senza attraversare la linea di divisione.

Un altro teorema di Jordan (1881) assegna la condizione perchè una *linea* sia *rettificabile* (lunghezza finita dell'arco), cioè che essa sia rappresentata da funzioni a *variazione limitata* (differenze di funzioni *monotone,* sempre crescenti o sempre decrescenti).

Ricorderemo infine il teorema di LEBESGUE (1904) che assegna la condizione per l'esistenza della derivata di una funzione: una funzione continua $y=f(x)$, che rappresenti una *curva rettificabile*, possiede *derivata quasi dappertutto,* cioè fatta eccezione al più per i punti di un insieme di *misura nulla* (racchiudibile in una serie d'intervalli la cui somma sia piccola ad arbitrio).

BIBLIOGRAFIA

U. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1878.

E. PASCAL, *Esercizi e note critiche di calcolo infinitesimale.* Milano, 1895.

F. ENRIQUES, art. *Curva,* nell'« Enciclopedia italiana ».

L. TONELLI, art. *Funzione,* ibidem.

L. TONELLI, *Serie trigonometriche.* Bologna, 1928.

Gli sviluppi costruttivi della moderna teoria delle funzioni di variabile reale — proseguiti, oltrechè in Germania e in Italia, anche in Francia, in Inghilterra e in America — si trovano esposti sistematicamente nei principali trattati di cui si è dato l'elenco nella bibliografia alla fine del libro primo.

Cfr. E. BOREL, *Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Parigi,* Gauthier et Villars.

12. - L'INFINITO ATTUALE E LA TEORIA DEGLI INSIEMI

Agli sviluppi più importanti della teoria delle funzioni di variabile reale ha contribuito un ordine d'idee, che ha anche per sè un grande interesse filosofico, e che si affaccia —

nelle sue origini — in contrapposto delle idee di CAUCHY e dei critici dell'Analisi infinitesimale. Cauchy (come appare dalle « Lezioni » edite da Moigno, 1868) non si contenta di dire che l'infinito o l'infinitesimo attuale non ha posto nel Calcolo infinitesimale, ove si considerano soltanto quantità suscettibili di crescere o di decrescere indefinitamente (*infiniti* e *infinitesimi potenziali*) ma interpreta i noti paradossi dell'infinito (il tutto equivalente ad una sua parte) nel senso che il concetto di una infinità di oggetti data come totalità (infinito attuale) sia logicamente contraddittorio. Questa era del resto la veduta dominante anche nei circoli filosofici. La filosofia empirica inglese, da LOCKE a HUME, aveva sostenuto (in opposizione ad alcune concezioni scolastiche) che l'idea dell'infinito esprime soltanto la possibilità di ripetere illimitatamente certi atti del pensiero, e non risponde affatto ad una realtà o ad una intuizione data al pensiero stesso. Questa veduta aveva penetrato, a suo modo, anche la filosofia di KANT e dei suoi successori: l'assoluto di HEGEL risolve appunto la contraddizione dell'Essere e del Non-essere col Divenire, cioè traduce in termini metafisici la stessa idea dell'Infinito potenziale; serie di relazioni illimitatamente proseguibile, non totalità compiuta o ultimo termine di una serie siffatta, trascendentemente dato. È probabile che proprio la filosofia di Hegel, per quanto essa contiene di contraddittorio alla tradizione della teologia cattolica, abbia dato la spinta alle speculazioni del prete austriaco BERNARDO BOLZANO, quali egli espone nei « Paradoxien des Unendlichen », opera iniziata nel 1847, e pubblicata soltanto dopo la sua morte, nel 1851.

Razionalista o realista, nel senso della controversia fra le scuole medioevali, Bolzano è convinto che l'infinito abbia un significato in sè, esente da contraddizioni, sebbene debba confessare di non esser riuscito a chiarire come un'apparenza l'apparenza di queste contraddizioni. In ogni modo egli fa proprio il pensiero di Leibniz: « Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son Auteur ».

In queste riflessioni si affaccia già l'idea che la proprietà meravigliosa di un insieme infinito, di potersi mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte, non costituisca propriamente un assurdo logico, ma tenga alla differenza fra il concetto del finito e quello dell'infinito. Una comprensione più approfondita di questa idea, conduce Cantor alla costruzione della teoria degli insiemi: che è, infine, un'Aritmetica generale dei numeri infiniti.

George Cantor — nato a Pietroburgo da famiglia tedesca il 3 marzo 1845, morto professore all'Università di Halle il 16 gennaio 1918 — dopo i primi suoi studi sulle serie trigonometriche fu tratto a speculare intorno alla numerosità degli insiemi infiniti e a stabilire alcune proposizioni precise, contraddicenti spesso alle più comuni nozioni.

Se si vuole dare una graduatoria degli infiniti, convien dire che un insieme di elementi è ugualmente numeroso di un altro (o che i due insiemi sono *equivalenti* o che hanno *egual potenza*) quando si può porre fra di essi una corrispondenza biunivoca, ed invece che uno di essi è più numeroso dell'altro (o che ha *potenza maggiore*), se una parte del primo equivale al secondo, ma *non* viceversa; cosicchè resta escluso che ad un insieme debba attribuirsi potenza maggiore di sè stesso. Ciò posto si riconoscerà, con dimostrazione rigorosa, che il *continuo* (cioè l'insieme dei punti di una retta o di un segmento lineare) ha maggior potenza in confronto ad un *insieme numerabile,* cioè ad un insieme i cui elementi possano farsi corrispondere ai numeri della serie naturale 1, 2, 3.... Ma invece il continuo ad una dimensione (cioè l'insieme lineare suddetto) ha potenza eguale al continuo a due o più dimensioni (1877); in altri termini, i punti d'un segmento sono in egual numero che i punti di un quadrato o di un cubo: proposizione, che appare a tutta prima un paradosso, sicchè il contrario era stato tenuto per vero, per esempio da S. Tommaso d'Aquino (*Summa* III q, X, 3).

Cantor è riuscito, in tal guisa, a stabilire una teoria dei numeri infiniti cardinali (o potenze degli insiemi) eliminando le apparenti contraddizioni logiche, che avevano tradizionalmente arrestato il pensiero su questa via. Egli ha mostrato,

d'altra parte, che — passando dal finito all'infinito — si perde anche la consueta connessione o identificazione dei numeri cardinali cogli ordinali: è lecito bensì di prolungare la serie dei numeri ordinali naturali (1, 2, 3, ...) con una serie *ben ordinata,* (cioè tale che ogni parte di essa abbia sempre un *primo* elemento), e così di introdurre dei numeri trasfiniti ordinali: $\omega_1\omega + 1_1 \dots 2\omega \dots, \dots \omega^2 \dots \omega^3 \dots \omega\omega \dots$, ma tutti questi trasfiniti (almeno per le serie che riusciamo effettivamente a *costruire*) corrispondono sempre ad insieme numerabili; e comunque non danno senz'altro la graduatoria dei numeri infiniti cardinali. Si deve aggiungere che — colla teoria di Cantor — le contraddizioni dell'infinito sono soltanto rimosse, non definitivamente tolte, perchè, sia nella serie dei cardinali sia in quella degli ordinali, appare la possibilità di passare sempre da un infinito ad un altro più grande, e il concetto del massimo infinito (della totalità degli insiemi o dell'ultimo infinito nella serie degli ordinali) dà luogo ad irriducibili *antinomie*, che affaticano ancora i logici matematici.

Nondimeno la dottrina di Cantor segna una data nella storia del pensiero matematico e filosofico; e — per le diverse applicazioni dei suoi concetti fondamentali agli insiemi di punti, alla loro misura, ecc. — riesce a chiarire e a precisare molte questioni elementari che stanno alla base della Analisi.

BIBLIOGRAFIA

Gli elementi della teoria degli insiemi di Giorgio Cantor si trovano esposti per esempio da:

F. Enriques, *I numeri reali*, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. 3ª ed. Vol. I. Bologna, 1928.

E. Borel, *Lecons sur la théorie des fonctions*. Parigi, Gauthier et Villars, 1898.

Il più vasto trattato sull'argomento è

A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*. 2ª ed. Berlino, Springer, 1923.

Per le questioni concernenti l'infinito cfr:

F. Enriques, *L'infinito nella storia del pensiero*, in « Scientia », Dec. 1933.

G. VIVANTI, *Il concetto d'infinitesimo. Saggio storico*. Mantova, 1894.
B. BOLZANO, *Paradoxien des Unendlichen*. Lipsia, 1851.
P. DU BOIS-REYMOND, *Die allgemeine Functionentheorie*. Tubinga, 1882.
L. COUTURAT, *De l'infini mathématique*. Parigi, 1896.
J. COHN, *Geschichte der Unendlichkeit*. Lipsia, 1896.

13. - TEOREMI D'ESISTENZA DEGLI INTEGRALI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI E CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Se ora, dai problemi d'origine logico-filosofica, ci volgiamo a considerare gli aspetti scientifico-costruttivi del movimento critico intorno ai principii dell'Analisi, dobbiamo fare anzitutto questa constatazione generale: che l'aver posto indipendentemente dall'intuizione geometrica le basi del Calcolo ha permesso di estendere gli stessi metodi di ricerca a campi che oltrepassano quella intuizione e così di proseguire la costruzione molto al di là dei limiti che ad essa parevano naturalmente segnati.

Ci si può render conto del progresso delle idee, volgendo la mente al teorema d'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali, dimostrato da Cauchy, a quanto pare fin dai primi anni del suo insegnamento alla Scuola politecnica. Riferiamoci, per semplicità di discorso, alle equazioni di 1° ordine. Come abbiamo notato nel § 31 del Libro primo una tale equazione fa corrispondere nel piano (o in un campo del piano) ad ogni punto una direzione associata: le linee integrali sono quelle descritte da un punto che si muova seguendo in ogni istante come direzione del moto la direzione associata. Questa interpretazione geometrica si può vedere soggiacente agli sviluppi di Cauchy; essa porta ad approssimare le linee integrali mediante poligonali iscritte, che al limite danno proprio codeste linee. La dimostrazione d'esistenza di Cauchy traduce in termini analitici questo metodo di approssimazione successiva. Ma riconosciamo ciò che il procedimento reca di nuovo. Nei ragionamenti del Calcolo infinitesimale si ha generalmente una curva data, e si riesce a definire la lunghezza, l'area, ecc. avvicinandosi ad essa con

poligonali iscritte: l'intuizione geometrica della curva porta con sè una veduta di continuità; la poligonale iscritta, al crescere indefinito del numero dei lati, tende alla curva data. Invece qui non si ha più a che fare con una curva data a priori; all'opposto c'è una serie infinita di poligonali o di curve, che vale a definire una *curva* come *limite*. L'intuizione di continuità che entra in giuoco appare subito di un ordine superiore e di applicazione più delicata, perchè una serie di linee variabili non ci dà sempre una curva-limite, intuitivamente definita.

Ora la questione che si presenta nella dimostrazione d'esistenza degli integrali d'una equazione differenziale si ritrova in altri campi, ove diventa sempre più necessario precisare la veduta di continuità suggerita da una vaga analogia. Citiamo: la dimostrazione di esistenza degli integrali delle equazioni a derivate parziali (che è dovuta a Sofia Kowalewski), e più particolarmente gli sviluppi del cosidetto *Calcolo delle variazioni*.

I problemi a cui si riferisce questo ramo dell'Analisi consistono nella determinazione dei *massimi e minimi funzionali*: per esempio la linea per cui la caduta di un grave da un punto dato ad un altro si effettua nel tempo minimo (*brachistocrona-cicloide*, di Jean Bernoulli, 1686) ovvero linee di lunghezza minima (*geodetiche*) congiungenti due punti sopra una superficie (J. Bernoulli, Taylor ed Eulero, ecc.).

Non è un ramo del tutto nuovo, poichè l'antichità ha già conosciuto i problemi sugli *isoperimetri* studiati da Zenodoro e da Pappo (cfr. § 7 del Libro primo). Ma, attraverso gli studi di Giacomo Bernoulli e di Eulero, si arriva, in quest'ordine di idee, alla soluzione generale dei problemi isoperimetrici con Eulero (1744) e poi con Lagrange (1762).

Più precisamente, si scrivono le equazioni differenziali a cui debbono soddisfare in generale le linee (o le superficie, ecc.) cui s'impongano date condizioni di massimo o minimo. Ma occorre ancora: 1°) dimostrare l'esistenza effettiva degli integrali di codeste equazioni, colle condizioni ai limiti che appariscono in tali problemi (per esempio: l'esistenza sopra una superficie, di una geodetica passante per due punti, e

non solo di una geodetica uscente da un punto con una data tangente); 2°) dimostrare che codeste linee integrali — le cosidette *estremali* del problema — danno veramente il massimo o il minimo richiesto, o cercare entro quali limiti lo realizzino.

La seconda questione è tanto più grave che già nel campo delle funzioni di due variabili, le condizioni di massimo o minimo, ottenute annullando le derivate parziali, non bastano più, in generale, a caratterizzare un massimo o un minimo, intervenendo delle opportune diseguaglianze (distinzione fra i *punti ellittici* ed *iperbolici* di una *superficie*). Tanto peggio accadrà qui dove intervengono, in sostanza, funzioni di infinite variabili!

Molti sforzi sono stati fatti dai matematici per sciogliere tali questioni. Legendre (1786) ha introdotto la variazione seconda, che ha un ufficio analogo alla derivata seconda nei problemi di massimo e minimo delle funzioni di una variabile. Jacobi (1838) ha investigato la condizione che qui appare, circa l'esistenza e la determinazione della linea estremale in tutto un intervallo, traendone la sua nota teoria dei fuochi coniugati (p. es., la proprietà di minimo di una geodetica si arresta per l'arco che va da un punto al *fuoco,* che cade nella prossima intersezione di essa con una geodetica infinitamente vicina); Weierstrass, nelle sue Lezioni di Berlino del 1879, conosciute solo più tardi per opera di numerosi scolari, ha completato e reso rigorosa questa teoria, che d'altra parte s'incontra con quella che per le geodetiche ha sviluppato indipendentemente G. Darboux, nelle sue lezioni di Geometria differenziale del 1889.

Frattanto però maturava un nuovo indirizzo del Calcolo delle variazioni, in cui si cerca di provare a priori l'esistenza di una linea (o superficie, ecc.) che realizza un certo massimo o minimo, costruendo la *linea-limite* in una data famiglia di linee, indipendentemente dall'equazione differenziale a cui essa dovrà soddisfare. Queste considerazioni s'iniziano, a quanto pare, con un teorema di G. Ascoli del 1884, che indica la « eguale continuità » come criterio per l'esistenza della linea-limite, e si proseguono con un teorema di C. Ar-

ZELÀ del 1889, da cui si può far dipendere la prima dimostrazione diretta dell'esistenza di un massimo o minimo, fornita da D. HILBERT nel 1900 (1): la quale si applica in particolare al caso delle geodetiche. In tal guisa i problemi del Calcolo delle variazioni sono posti sopra una base più naturale, in accordo colla nostra visione immaginativa della soluzione. Essi vengono così a collegarsi ad un ordine d'idee più generale, cioè alla teoria della *funzioni di linee* o dei cosiddetti *funzionali* del Volterra.

BIBLIOGRAFIA

Una esposizione riassuntiva delle questioni qui accennate trovasi nell'articolo di F. ENRIQUES, *Massimi e minimi nell'Analisi moderna*, in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, parte III (vol. IV). Bologna, Zanichelli, 1927.

La sistemazione si trova nei trattati di:

KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*. Braunschweig, 1900.

J. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des variations*. Parigi, 1910.

L. TONELLI, *Fondamenti del Calcolo delle variazioni*. Bologna, Zanichelli, 1921, 1923.

14. - FUNZIONALI ED EQUAZIONI INTEGRALI

La teoria delle funzioni, e in particolare il calcolo delle variazioni, si prolunga naturalmente in un ordine di problemi dove interviene la considerazione generale della dipendenza di un numero o di una funzione da altre funzioni (e quindi da linee o da superficie, ecc.) o da infinite variabili (2). La derivata e l'integrale offrono già esempio di questo genere di dipendenza costituendo appunto degli *operatori funzionali* o più semplicemente dei *funzionali*, secondo l'espressione introdotta da J. Hadamard. Così pure l'area racchiusa o la

(1) *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip*, « Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung » e Math. Ann. LIX, 161.

(2) Una funzione continua di una variabile dipende da un'infinità numerabile di variabili, quali sono i valori da essa assunti nei punti razionali.

lunghezza di una curva piana, sono funzionali dipendenti dalle funzioni che definiscono la detta curva.

La fisica offre gran numero d'occasioni in cui un fenomeno appare dipendere dalla forma di una certa linea o superficie, ovvero da una infinità di variabili; e così suggerisce la considerazione dei funzionali anche prima che a questa si apra un largo campo d'applicazioni colla veduta delle *meccaniche ereditarie* (cfr. Libro secondo). Appunto dalla fisica VITO VOLTERRA è stato condotto a proporsi lo studio più generale degli operatori funzionali o delle « funzioni di linee » come in principio li designava. Egli dice [1]: « .... quando si studia un fenomeno come conseguenza di un numero finito di cause, si fa un'astrazione perchè si vengono a trascurare degli elementi che si considerano come piccolissimi, di fronte ad altri preponderanti. In tal modo l'esame del fenomeno è soltanto approssimato, onde s'intravvedono facilmente casi nei quali, per approfondire convenientemente la questione, sarà necessario tener conto di un numero infinito di variabili ».

Le prime ricerche del Volterra risalgono ad una serie di Note pubblicate all'Accademia dei Lincei, negli anni 1887-91, e ad una memoria degli Acta Mathematica del 1889. Dopo un'interruzione di alcuni anni, egli le ha riprese e svolte in rapporto coi problemi d'inversione degli integrali definiti e quindi colle equazioni integrali, negli Atti dell'Accademia di Torino (1896), proseguendole poi ininterrottamente, con applicazioni alla fisico-matematica e, più recentemente, alla biologia statistica.

Senonchè il pensiero che abbiamo visto espresso nel citato passo del nostro autore sembra così semplice che si stenta a credere non essersi presentato già prima ad altri cultori della filosofia naturale. Convien ritenere piuttosto che lo studio generale dell'argomento dovesse apparire temerario, finchè lo sviluppo critico dell'Analisi non offrisse le condizioni presupposte per renderne concepibile la realiz-

---

[1] Conferenza pubblicata nella *Revue du Mois* e poi nel volumetto *Saggi scientifici*.

zazione. Perciò stimiamo circostanza non fortuita che appunto il disegno generale della teoria dei funzionali si sia affacciato come programma di lavoro ad un giovane matematico cresciuto, nella scuola di Ulisse Dini, alla critica dei principi del Calcolo; per la quale egli ha conservato sempre una particolare simpatia.

Volterra scorge fin dagli inizii il principio direttivo che deve condurlo nella sua ricerca: si tratta di usare, nel senso più largo, della stessa idea che sta alla base del Calcolo infinitesimale, cioè del «passaggio dal finito all'infinito».

Che cosa fanno i matematici quando cercano, per esempio, l'integrale di una funzione o, sotto forma geometrica, l'area racchiusa da una linea? Essi considerano semplicemente una somma composta di un gran numero di termini, facendo aumentare e tendere all'infinito questo numero, mentre decresce simultaneamente la grandezza degli elementi sommati. E sempre il passaggio dal finito all'infinito segna il cammino dell'Analisi, sia nella teoria delle serie o dei prodotti infiniti o delle frazioni continue, ecc.

Ma la stessa idea appare in una forma più estesa traverso alcune considerazioni che sono familiari ai fisico-matematici; quando, per esempio, si passa da un sistema di n punti materiali dotati di piccola massa ad un corpo continuo la cui massa viene data sostituendo alla somma delle masse un integrale definito. Volterra si rende conto dell'estensione che si può dare a questa idea e del profitto che si può trarne nella teoria che ha impreso ad edificare. Consideriamo, per esempio, le sostituzioni lineari sopra più variabili (omografie in uno spazio): per composizione di esse si definisce una nuova sostituzione, che è il loro *prodotto*. Ebbene: si può passare dal prodotto di un numero finito di tali sostituzioni ad un *prodotto infinito,* dove coll'aumentare del numero dei fattori questi si accostino sempre più alla sostituzione identica, diventando dunque *trasformazioni infinitesime*. In tal guisa si è condotti alla *integrazione delle sostituzioni lineari*: un'idea che il Volterra adopera per ricostruire la teoria delle equazioni differenziali lineari.

Questo pensiero, tanto più fecondo quanto più semplice,

— il passaggio opportunamente fatto dal finito all'infinito — riceve uno sviluppo sistematico nello studio dei funzionali. Qui si può scorgere una nuova maniera d'intendere quella veduta di continuità che, nell'opera degli Eulero e dei Lagrange, appare principio costruttivo delle più alte dottrine dell'Analisi; e in questo senso è lecito cercare i precursori del Volterra: senonchè l'idea riceve il suo vero significato dall'uso concreto che ne vien fatto.

Un problema assai delicato è quello di definire la derivata d'un funzionale $F[f(x)]$. A prima vista il principio del passaggio dal finito all'infinito suggerirebbe di variare il valore della funzione $f(x)$ su cui si opera, in un sol punto dell'intervallo $[a\ b]$ dove essa è definita. Ma ciò non condurrebbe a nulla di utile. Conviene variare la $f(x)$ in tutti i punti di un piccolo tratto l dell'intervallo, aggiungendole dunque una funzione arbitraria ma piccola $\omega(x)$, e considerare l'integrale $\sigma = \int_l \omega(x)dx$; dividendo l'incremento del funzionale

$$\Delta F = F[f(x) + \omega(x)] - F[fx)]$$

per σ, si cercherà il limite del rapporto $\frac{\Delta F}{\sigma}$, per l e massimo di ω tendenti a zero, e si definirà in tal guisa (quando esiste la *derivata funzionale* $F'[f(x), \xi]$.

Si ha così l'estensione della derivata parziale di una funzione di più variabili. Il concetto del differenziale totale si estende, a sua volta, mediante la *variazione*

$$\delta F = \int_a^b F'[f(x), \xi]\, \delta f(\xi) d\xi$$

che rappresenta evidentemente un funzionale di

$$\delta f(\xi) = \omega(\xi).$$

Di qui appare il posto che spetta all'ordinario calcolo delle variazioni in questo ordine più generale d'idee.

Ora la considerazione delle derivate funzionali successive conduce il Volterra ad uno sviluppo analogo alla serie di Taylor (1887): sotto condizioni assai larghe, un funzionale

qualsiasi ammette come espressione analitica una serie procedente per successivi integrali multipli:

$$F[f+\varphi] = F(f) + \int_a^b F'[f(x), \xi]\, \varphi(\xi)\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} \int_a^b \int_a^b F''[f(x), \xi_1 \xi_2]\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 + \ldots$$

Se ci si arresti al primo termine dello sviluppo si avrà la funzione associata ad una certa $f(x)$ iniziale; arrestandosi al secondo termine si avrà rispetto a $\varphi(x)$, un *funzionale lineare* (analogo alla funzione lineare di una variabile) che gode della *proprietà distributiva*:

$$F[\varphi_1 + \varphi_2] = F[\varphi_1] + F[\varphi_2],$$

e

$$F[c\varphi] = cF[\varphi].$$

Lo sviluppo di Volterra fa risaltare il posto che tocca, fra le *equazioni funzionali*, a quelle che si esprimono mediante integrali (semplici o multipli); le quali prendono il nome di *equazioni integrali*, e quando ci compaiano anche operazioni di derivazione ordinaria, di *equazioni integro-differenziali*.

Tipi particolari di equazioni integrali, e specialmente di quelle cui dà luogo l'*inversione* degli integrali definiti, si sono presentati da tempo ai matematici. Il primo esempio di tale ordine di problemi s'incontra nella questione proposta da Abel di « determinare la forma che deve avere la curva lungo la quale si faccia cadere un grave, perchè il tempo della caduta fino al punto più basso sia una data funzione dell'altezza h da cui s'inizia il movimento ». Questo problema conduce all'inversione dell'integrale definito:

$$\sqrt{2g}\, \varphi(h) = \int_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-g}},$$

cioè a cercare l'espressione della u per mezzo di φ. Quando la funzione data φ sia costante, si ricade nella curva tautocrona, che è notoriamente la cicloide.

Altri esempi di equazioni integrali si sono presentati a LIOUVILLE (1837), a C. NEUMANN, a DINI. Risoluzioni del problema d'inversione dagli integrali in casi particolari notevoli sono state date da BELTRAMI (1880-82), da SONINE (1884), da LEVI-CIVITA (1895); ma la più larga spinta alla teoria è venuta dal Volterra (1896-97) e dal matematico norvegese FREDHOLM (Acta Mathematica, 1903) colla risoluzione di due classi generali di equazioni integrali (risp. a limite superiore variabile o a limiti fissi), che sono conosciute appunto col nome dei due scienziati.

In queste risoluzioni si ha una bella applicazione del principio del passaggio dal finito all'infinito; le equazioni integrali appaiono come limite di sistemi di infinite equazioni; sistemi di equazioni lineari, nel caso più semplice che risponde all'inversione degli integrali definiti.

La teoria delle equazioni integrali ha dominato, si può dire per un ventennio, i progressi dell'analisi; in particolare D. HILBERT e la sua scuola vi hanno recato sviluppi e contributi di grande importanza. Ma non è il caso per noi di arrestarcisi. Vogliamo soltanto rilevare che le equazioni integrali porgono una nuova veduta semplificatrice, in confronto della dottrina classica delle equazioni a derivate parziali. Se si tratta di studiare un fenomeno, come la propagazione del calore in una lamina conduttrice, il problema è di integrare la corrispondente equazione a derivate parziali (che è del 1° ordine rispetto al tempo), tenendo conto delle *condizioni ai limiti*: per esempio, si suppone che l'orlo della lamina sia tenuto ad una data temperatura e si cerca la temperatura dei punti interni. Secondo lo schema classico si dovrebbe in generale:

1°) formare l'integrale indefinito contenente una funzione arbitraria;

2°) e poi determinare codesta funzione mediante l'equazione differenziale che esprime le condizioni imposte sul contorno della lamina.

Orbene: il legame fra la temperatura nel punto interno dato e la linea-contorno su cui si ha una temperatura costante assegnata, si esprime direttamente con un funzionale,

cioè con una funzione dipendente dalla forma del contorno suddetto; e si traduce quindi in un'equazione integrale.

In questo senso Volterra e Fredholm hanno insegnato appunto a ricondurre problemi classicamente espressi dalle equazioni a derivate parziali ad equazioni integrali; e la teoria è stata svolta successivamente da altri matematici, in ispecie da P. Lévy e da J. Hadamard.

La teoria delle funzioni di variabile reale, il calcolo funzionale e le equazioni integrali, ci fanno toccare uno dei poli delle Matematiche contemporanee, dove si tende alla massima generalità dei problemi e quindi alla massima *estensione* dei concetti. All'altro polo si trovano le ricerche su enti determinati nel modo più preciso: lo studio dell'Algebra e delle funzioni algebriche o delle trascendenti connesse, da cui abbiamo preso le mosse in questa esposizione. Qui si incontra la massima *comprensione* dei concetti, cioè la ricchezza di proprietà o di note, in rapporto colla particolarità dell'oggetto studiato ed in ragione inversa coll'estensione.

A quest'ordine di ricerche reca un nuovo apporto d'idee, di problemi e di metodi, lo sviluppo di un ramo delle Matematiche che — sotto l'influenza più o meno diretta dell'Analisi — ha subìto nel secolo decimonono un rinnovamento meraviglioso, e di cui lo spirito penetra a sua volta tutti gli altri rami della scienza: vogliam dire della Geometria.

BIBLIOGRAFIA

S. Pincherle e U. Amaldi, *Le operazioni distributive*. Bologna, 1901.

V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Parigi, 1913.

V. Volterra e L. Fantappiè, *Theory of Functionals*. Londra-Glasgow, 1931.

T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*. Parigi, 1912.

D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Lipsia, 1912.

V. Volterra, *Leçon sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles*. Parigi, 1913.

G. Vivanti, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari*. Milano, 1916.

V. Volterra et J. Perès, *Théorie générale des fonctionnelles*. T. I.° Parigi, 1936. (Contiene anche una ricca bibliografia).

Capitolo III.

GLI SVILUPPI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA ED ALGEBRICA

15. - Le origini della geometria proiettiva

A chi raffronti gli sviluppi che diversi rami delle Matematiche hanno ricevuto durante il secolo decimonono, potrà sembrare giustamente che questo o quello abbiano un'importanza scientifica superiore, che conducano a resultati più generali o dominino più largamente le applicazioni, ma nessuno apparirà più meraviglioso dello sviluppo della Geometria. Perchè questa disciplina, che pareva dover rimanere fissata per sempre negli schemi dell'Euclide, non solo è cresciuta per nuovi apporti, ma ha radicalmente trasformato il suo spirito, i suoi metodi, i suoi oggetti, così da divenire veramente scienza nuova.

Dice Darboux: « La Géométrie moderne... est venue, dès la fin du XVIII.ème siècle, contribuer en large mesure au renouvellement de la Science mathématique tout entière, en offrant aux recherches une voie nouvelle et féconde, et surtout en nous montrant, par des succès éclatants, que les méthodes générales ne sont pas tout dans la Science et que même dans le sujet le plus simple, il y a beaucoup à faire pour un esprit ingénieux et inventif ».

Questo rinascimento dello spirito geometrico, che pareva definitivamente sopraffatto dal prevalere esclusivo dell'Analisi, ha origine dalla scuola di Gaspard Monge e segnatamente dal suo grande discepolo Victor Poncelet; ed è storicamente determinato da due motivi, cioè: 1°) da una corrente d'idee che risale alla tecnica dei pittori e che, dopo essere affiorata nella Francia del secolo XVII con Desargues e Pa-

scal, si continua come moto scientifico sotterraneo da una schiera di geometri di second'ordine; e 2°) dalla stessa dominazione dell'Algebra traverso i metodi della Geometria analitica, poichè la reazione a questo dominio porta necessariamente a rielaborare le idee geometriche in guisa da rispondere allo spirito di generalità introdotto dall'Algebra.

L'alleanza fra pittura e geometria, così caratteristica dell'arte italiana del Rinascimento, ha sviluppato tutta una serie di regole, che si assommano nella prospettiva, costituendo un corpo di dottrina che resta tuttavia in margine alla scienza classica degli « Elementi » d'Euclide, di cui i circoli dotti rinnovavano allora lo studio. Appunto nella prospettiva assume importanza la considerazione delle proprietà grafiche o ottiche della figura e si affaccia naturalmente la scoperta che le immagini di rette parallele debbono concorrere in un *punto di fuga*: qui si vede in germe l'idea del *punto all'infinito* della retta, quale s'introduce alla base della Geometria proiettiva (1).

Il trattato sulla prospettiva di Guido Ubaldo dal Monte (1600) enuncia e dimostra in modo generale ed esatto « *la legge del punto di fuga* »: « ... tutte le rette parallele fra di esse ed a l'orizzonte, quantunque inclinate al piano del quadro, convergono sempre verso un *punto* della linea orizzontale; e questo punto è quello ove questa linea è incontrata dalla retta che è condotta parallelamente dall'occhio a quelle di prima ».

Il punto di cui qui si discorre è denominato dall'autore « punctus concursus », ed oggi si dice « punto di fuga ».

La nozione del punto di concorso o di fuga dei prospettivisti, meditata da Keplero, gli ispira l'idea del « *punto a distanza infinita* » ch'ei collega ad una visione di continuità delle figure, o (com'egli stesso si esprime) ad un principio di « *analogia* ». Infatti tale idea appare in un'operetta che vuol essere un complemento all'Ottica di Witelo, « Paralipomena ad Vitellionem » (1604); dove l'autore considera esplicita-

(1) Cfr. U. Cassina, *La prospettiva e lo sviluppo dell'idea dei punti all'infinito*, in « Periodico di Matematiche », novembre 1921.

mente il *fuoco cieco* (all'infinito) della parabola, e si vale del passaggio per continuità (o dell'analogia) per dedurre le proprietà di una specie di coniche da quelle di un'altra: « plurimum namque amo analogias, fidelissimos meos magistros, omnium naturae arcanorum conscios ».

Questi sono i precedenti dell'opera di Desargues. GIRARD DESARGUES (nato a Lione nel 1593 e morto il 1662) è il primo geometra che studi sistematicamente le coniche come proiezioni del cerchio, arrivando nei suoi sviluppi così avanti da darci una vera geometria proiettiva *avant la lettre*. Nella sua trattazione egli introduce esplicitamente il punto comune alle rette di un fascio (concorrenti al finito o all'infinito) che chiama « but d'une ordonnance de droites » e la retta (al finito o all'infinito) comune ad un fascio di piani, che chiama « aissieu d'une ordonnance de plans »: sebbene non appaia spingere più avanti l'indagine del legame che intercede fra la retta all'infinito d'un piano e i suoi punti all'infinito. La proposizione di prospettiva che vi corrisponde, preludendo alla spiegazione che ne ha dato poi Poncelet — cioè che « i diversi punti di fuga di tutte le rette d'un piano sono sulla linea di fuga di questo » — trovasi rilevata in modo generale ed esplicito, per la prima volta, nei « New principles of linear perspective » di B. Taylor (1719).

Desargues (1639) e PASCAL (1640), che è entrato accanto a lui nello stesso ordine di idee, sviluppano — secondo il metodo delle proiezioni — la teoria delle coniche. Ci restano ancora due teoremi importanti che portano rispettivamente il nome di codesti studiosi: il teorema di Desargues sul quadrangolo iscritto in una conica (che offre a noi il modo di costruire la conica per quattro punti tangente ad una retta) e il teorema di Pascal sull'esagono iscritto in una conica.

Ma i metodi appena sbocciati dei due geometri furono arrestati nel loro sviluppo dal trionfo della geometria analitica di Descartes e Fermat, che — aprendo la via all'applicazione dell'Algebra — veniva a porgere un mezzo sistematico per la trattazione dei problemi geometrici: promettendo di non più esigere quella speciale intuizione — quasi piccolo tratto di genio — che la via sintetica richiede di volta in volta. Tut-

tavia le idee di Desargues e Pascal non restano senza qualche seguito. Fra coloro che ne raccolsero l'eredità non può dimenticarsi NEWTON, il quale nella sua classificazione delle curve piane del terz'ordine assegna i tipi delle parabole cubiche campaniformi cui si possono ridurre tutte quelle curve per proiezione (*genesis curvarum per umbras*).

E da Newton alcunchè dello spirito della geometria proiettiva passa nei discepoli. In ispecie MAC-LAURIN, proseguendo qualche idea del maestro, coltiva la teoria delle curve algebriche superiori, che da lui ripete i suoi principii. In Francia DE LA HIRE (1640-1718) porge alcuni contributi allo studio delle coniche; LE POIVRE (1704) pone i fondamenti della teoria delle polari. Questi geometri, precorrendo il moto scientifico che s'inizia alla fine del secolo XVIII, stabiliscono la continuità storica del pensiero, e per ciò sono giustamente ricordati da Michele Chasles nel suo celebre « Apercu historique ». Ma infine se codeste correnti quasi sotterranee, o almeno in margine dei circoli accademici più elevati, sboccano in uno sviluppo che è reazione contro il predominio assoluto del metodo analitico nella geometria, bisogna dire che l'impulso a ciò sorge non tanto dagli ambienti scientifici, quanto dalla tecnica.

Tutta la tradizione dell'insegnamento geometrico degli artisti doveva reagire contro una tendenza che, pur soddisfacendo aspirazioni di generalità astrattta, mal poteva soddisfare le esigenze della pratica [1]. Dai problemi della Prospettiva, della Gnomonica, del taglio delle pietre e dei legnami, del disegno delle macchine, è venuta la *Geometria descrittiva* che GASPARD MONGE ha creata e introdotta come materia di studio nella scuola politecnica. In questa disciplina si fa uso delle proiezioni, ma — di solito — delle proiezioni ortogonali, che offrono appunto il modo di rappresentazione piana delle figure solide. Tuttavia si dà l'occasione di apprezzare le proprietà delle figure che si conservano per

---

[1] Qui conviene ricordare il *Traité de Perspective* di LAMBERT (1749) che svolge ad uso tecnico le applicazioni del metodo delle proiezioni, come già Desargues aveva insegnato.

proiezione e s'introduce così una certa visione della continuità geometrica. Questa riceve impulso soprattutto dagli studi superiori di Monge, che — anche nelle ricerche di geometria differenziale — ritorna spesso all'intuizione geometrica per trarne suggerimento alla risoluzione di problemi analitici. È certo che Monge stesso ha indicato il primo uso dell'immaginario in geometria, deducendo per esempio la proprietà generale della polarità rispetto ad una quadrica, dal caso in cui il polo sia esterno, e quindi il piano polare possa definirsi come quello che contiene la conica di contatto del relativo cono circoscritto. In tale ambiente gli scolari di Monge lavorano a rinnovare lo spirito dell'antica geometria, cercando di conferirle la medesima generalità che spetta al metodo analitico, e così di reagire vigorosamente al predominio di questo.

È chiaro che per ciò appunto essi dovevano meditare profondamente su quel che dà all'algebra il suo carattere generale, in confronto delle limitazioni che dividono in casi e sottocasi i ragionamenti euclidei, a seconda delle disuguaglianze fra gli elementi delle figure. Dunque proprio gli insegnamenti dell'Algebra vengono a comparire, in prima linea, fra i motivi ispiratori della reazione geometrica, che pure non tarda ad inalberare la bandiera del purismo. Se già le ragioni della logica storica non bastassero a provare questa asserzione, i tentativi di Carnot e poi i documenti forniti dai quaderni di Saratov (che espongono la preparazione di Poncelet nel periodo costruttivo della geometria proiettiva) ne fornirebbero la convalida positiva.

16. - La geometria proiettiva e il principio di continuità di Poncelet

Nei vecchi trattati di Geometria proiettiva s'incominciava, di solito, coll'avvertire il lettore che la nuova geometria, a differenza dell'antica, considera le figure in tutta la loro generalità, specificando che le rette non sono limitate ad un loro segmento, ma prese in tutta la loro estensione, che gli

angoli non sono affatto limitati nei loro valori, sicchè per esempio un poligono convesso non si distingue più da uno concavo, ecc.

Queste avvertenze, che traducevano quasi un senso di meraviglia del geometra rispetto alle nuove concezioni, tendono a sparire in seguito ad una più profonda assimilazione di queste, ed anche alle influenze logiche che si sono esercitate sull'insegnamento, per cui appaiono talora inutili o talora — prese a sè in certe loro espressioni — prive di significato. Tuttavia è importante rendersi conto che il senso nuovo conferito alle figure, sta in stretto rapporto colla veduta di esse di fronte alle proiezioni.

Consideriamo, per esempio, un quadrilatero nell'accezione euclidea: sarà un quadrilatero sciolto, convesso o concavo, con quattro vertici e quattro lati, ciascun dei quali congiunge due vertici; e di esso potranno costruirsi le due diagonali, cioè le congiungenti delle coppie di vertici opposti (non appartenenti ad un medesimo lato).

Ora, se si sostituisca la figura con una sua proiezione qualsiasi, non solo potranno scambiarsi fra loro i quadrilateri convessi e concavi, ma anche un quadrilatero sciolto potrà diventare un quadrilatero intrecciato, e quindi dovranno cadere alcune distinzioni di elementi che non hanno affatto carattere proiettivo. Così, ritenendo il quadrilatero determinato dai suoi quattro vertici indipendentemente dall'ordine (cioè come « quadrangolo »), non vi sarà più motivo a distinguere i quattro lati (congiungenti le coppie di vertici consecutivi) dalle due diagonali (congiungenti le coppie di vertici opposti). E se, invece, si considera la figura come determinata dalle quattro rette che formano i lati, non vi è più motivo a distinguere i quattro vertici (intersezioni di lati consecutivi) dai due punti (punti diagonali) che sono le intersezioni delle coppie di lati opposti. Perciò la considerazione proiettiva ci induce a sostituire l'antico concetto del quadrilatero-quadrangolo, con quelli del quadrangolo completo (con sei lati) e del quadrilatero completo (con sei vertici). La considerazione di questi concetti più generali è, al tempo stesso, un prodotto della mentalità proiettiva ed una premessa ne-

cessaria perchè questa possa svolgersi in una costruzione sistematica. Insomma il metodo proiettivo, come trasformazione delle figure per continuità, porta una nuova veduta delle figure stesse, per la quale si deve ritrovare qualcosa di identico nella variazione continua di esse.

E proprio questa ricerca, che contraddice allo spirito delle distinzioni e delle limitazioni classiche, domina il periodo di elaborazione della geometria proiettiva, agli inizii del secolo decimonono. LAZARE CARNOT — l'autore del concetto del *quadrilatero completo* — prosegue tale indagine nella sua « Géométrie de position » (1803) che assorbe in sè il precedente studio « De la corrélation des figures... » (1801), e a cui fa seguito la « Théorie des transversales » (1806).

Il punto di partenza delle riflessioni di Carnot è l'imbarazzo in cui ci mette talvolta l'applicazione dell'algebra, offrendoci più soluzioni di quelle che convengono al problema proposto. La difficoltà era stata notata da Newton e da D'Alembert. di cui Carnot riporta alcune parole: « Il est vrai que cette abondance de l'Algèbre, qui donne ce qu'on ne lui demande pas, est admirable à plusieurs égards; mais aussi, elle fait souvent qu'un problème qui n'a réellement qu'une solution, en prenant son énoncé à la rigueur, se trouve renfermé dans une équation de plusieurs dimensions, et par là ne peut, en quelque manière, être résolu ».

Per ovviare a tali inconvenienti, aggiunge D'Alembert, bisogna far entrare nel calcolo la *situazione* degli elementi della figura. E Carnot, riprendendo la questione, cerca il nocciolo di essa in una dottrina delle quantità geometriche positive e negative, o meglio in un sostituto di questa, perchè la dottrina stessa è, per lui, incompatibile col concetto della grandezza geometrica, e deve essere rigettata. Il senso della dottrina cercata viene anche spiegato dall'autore, dicendo chè la sua « teoria ha per oggetto di esprimere mediante quadri comparativi, nelle figure dello stesso genere, la diversità di posizione delle loro parti corrispondenti, dopo aver prima formato il quadro delle loro proprietà comuni ». Sebbene la teoria di Carnot possa dar luogo a critiche (che effettivamente si trovano svolte da Poncelet nel 1818), è chia-

ro che lo spirito di essa è quello stesso che meglio appare nella concezione del « *Principio di continuità* » di Poncelet.

VICTOR PONCELET, nato a Metz nel 1788, studente a 19 anni della Scuola politecnica di Parigi, partecipa pochi anni appresso alla campagna napoleonica in Russia, e dieci giorni dopo il fatale passaggio della Beresina, nella traversata dello Dnieper, è fatto prigioniero dai Russi e trasferito a Saratov.

Durante i due anni di prigionia che quivi ebbe a trascorrere, Poncelet prosegue lo studio e la meditazione delle questioni geometriche suscitate nel suo pensiero dall'insegnamento di Monge. Alcune di queste avevano formato oggetto di ricerca per altri geometri usciti parimente dalla stessa scuola, e Poncelet ne prese cognizione soltanto al suo ritorno in patria. Dopo sei anni di lavoro, impiegato a mettere la propria opera in armonia col lavoro compiuto da altri, Poncelet espone i suoi resultati all'Accademia delle Scienze, e li riassume in un'esposizione sistematica, che è il « Traité des propriétés projectives des figures » (1822).

L'Accademia non fece buon viso alle concezioni del geometra. Era il tempo in cui le menti, affascinate dalla potenza del metodo analitico, erano meno disposte a gustare la geometria degli antichi. Cauchy, relatore, pure rilevando l'importanza di alcuni resultati di Poncelet, denunziava l'imprudenza dei suoi metodi: ed è chiaro che quei fecondi procedimenti euristici dovevan apparire sospetti all'impeccabile rigorista!

D'altronde — dice Bertrand — gli accademici, cogli animi rivolti alle più alte questioni dell'Analisi, « trovarono nella vasta piana indicata da Poncelet, piuttosto che un dottore un maestro, che mostrava loro delle verità ammirevoli per la scuola, anzi che interessanti per l'Accademia ».

Il geometra innovatore si dolse assai del misconoscimento della sua opera. Il successo personale gli venne poi dalle ricerche di meccanica, essendosi fatto conoscere per la costruzione di una ruota idraulica da cui l'acqua esce quasi senza velocità, con minima perdita d'energia. In seguito a questa scoperta egli è chiamato professore di Meccanica alla Scuola d'Applicazione d'Artiglieria e Genio a Metz (1824), donde

passa più tardi alla medesima cattedra presso la Sorbona a Parigi (1838-48); entra anche all'Accademia nella sezione di Meccanica, fino dal 1834.

Poncelet muore nel 1867, stimato soprattutto come meccanico. Nel frattempo la geometria ha celebrato i suoi trionfi; e la gloria più larga dei nuovi metodi è andata ad uno scienziato che molto ha fatto per divulgarli e fecondarli, e che pure vi ha portato un notevole buon gusto, ma che possiede infine uno spirito meno originale, dico: Michele Chasles.

Che cosa c'è nel « Traité des propriétés projectives » di Poncelet?

Si può dire ch'esso porge quell'insieme di proprietà degli enti elementari, e specialmente delle coniche e dei sistemi di coniche, che costituiscono anche oggi la materia di un trattato di Geometria proiettiva.

L'autore pone, all'inizio del suo trattato, la distinzione delle proprietà metriche e descrittive (o grafiche) e cerca le espressioni metriche invarianti per proiezione (la più semplice delle quali è il birapporto di quattro punti d'una retta). La teoria delle coniche è svolta partendo dal cerchio e dai sistemi di cerchi (centri di similitudine, assi radicali di due cerchi, ecc.). C'è qui un argomento affatto elementare trattato da Gaultier La Tour nel 1812; Poncelet che, a quell'epoca, era già partito per la Russia, non ne aveva avuto notizia, ma riflettendovi per proprio conto ne ha tratto le conseguenze più belle, che sviluppa appunto nel Traité.

Il sistema di due coniche aventi al più due intersezioni, si lascia ricondurre, per proiezione, al sistema di due cerchi, e l'asse radicale di questi porge una corda comune reale o ideale. Il caso più generale di due coniche qualunque, intersecantisi in quattro punti, si riattacca al precedente mediante il principio di continuità, che Poncelet approfondisce, sviluppando la teoria geometrica dei *punti* (o delle coppie di punti) *immaginarii*. E. Bompiani ha fatto vedere come questa teoria, se pure concepita in forma metrica, si riduca infine a quella che, con metodo puristico, ha fondata più tardi Staudt.

L'opera di Poncelet sviluppa, a lungo, le proprietà dei poligoni iscritti e circoscritti rispetto ad una conica, dando così i teoremi di Desargues e di Pascal, indica le costruzioni di 2° grado colla sola riga ed un cerchio fisso (argomento ripreso, più tardi, da Steiner), ecc.

Ma ciò che caratterizza quest'opera di fronte alle esposizioni attuali, è il metodo, che risale sistematicamente dalle proprietà metriche alle proprietà proiettive, concepite, in qualche modo, come espressione generale di quelle, e l'uso del principio di continuità come complemento del principio di proiezione. Nel pensiero di Poncelet, una varietà continua di enti e figure (tale che si passi dall'uno all'altro per variazioni insensibili) costituisce un unico *genere*, a cui risponde un tipo rappresentante lo *stato generale* della figura, e a questo vengono subordinate tutte le particolarizzazioni possibili.

Viceversa dai casi particolari si risale alla figura generale: una relazione, grafica o metrica, dimostrata per una figura i cui elementi soddisfino a certe disuguaglianze, si estende senz'altro al di là di queste, purchè — nei casi metrici — si tenga conto delle possibili variazioni di segno dei segmenti che vi compaiono, e supposto sempre che gli elementi fra cui la relazione intercede mantengano la loro realità.

In tal guisa Poncelet intende a realizzare il programma concettuale che trova espresso in uno scritto di Ch. Dupin (Développements de géométrie, 1813), da lui preso come epigrafe del Traité:

« Il semble que, dans l'état actuel des sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes, soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée et féconde de la plus grande variété des faits particuliers ».

Il principio di continuità che porta a questa realizzazione è concepito da Poncelet come un assioma primitivo: « le principe de permanence ou continuité indéfinie des lois mathé-

matiques des grandeurs variables par succession insensibles » non va tratto dall'Algebra piuttosto che dalla Geometria, essendo « une de ces vérités premières qu'il est impossible de ramener à d'autres plus simples, parce qu'elles ont leur source et leur certitude immédiates dans notre manière de voir autant que dans les faits, dans la nature des choses » (Lettera a Terquem, 23 novembre 1818).

Cauchy, incaricato di esaminare una memoria di Poncelet presentata all'Accademia nel 1820, ha criticato codesto principio: « une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces restrictions n'existent plus », e che — se le si accordasse troppo favore — ci farebbe « tomber quelquefois dans des erreurs manifestes ». Egli alludeva qui ad applicazioni al calcolo degli integrali definiti, che sono fuori del campo algebrico a cui Poncelet sempre si riferisce.

Eppure la teoria delle funzioni di variabile complessa fondata da Cauchy porge proprio la più precisa giustificazione delle vedute di Poncelet!

I geometri che sono venuti dopo hanno escogitato teorie ingegnose e ben architettate per rendere indipendente questo o quel procedimento, e in particolare l'uso degli immaginarii, dal principio di continuità. Così Chasles, assumendo il principio delle *relazioni contingenti* sulla base dell'Algebra, mira appunto a giustificare tale uso, siccome d'altra parte fa Plücker, adottando la più estesa concezione della geometria analitica. E Staudt più tardi (1847) costruirà la teoria sintetica precisa di codesti elementi. Ma tutti questi sviluppi non esauriscono il valore del principio di Poncelet. E quando pure si critichi la forma un po' vaga ed oscura in cui egli lo ha espresso, si condanni il suo purismo che gli fa rifiutare i soccorsi dell'Analisi, ecc., ecc., tutti i biasimi e tutte le riserve dei logici non tolgono al significato storico ed euristico di una veduta, che appare un po' come lo spirito creatore dei nuovi e più alti sviluppi della geometria algebrica.

BIBLIOGRAFIA

Sul principio di continuità nella Geometria:

E. Bompiani, *Il principio di continuità e l'immaginario in geometria*, in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* ordinate da F. Enriques. Vol. II. Bologna, Zanichelli, 1925.

F. Enriques e O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*. L. III, cap. IV (Vol. II. Bologna, 1918).

F. Enriques e O. Chisini, art. *Continuità* nella « Enciclopedia Italiana ».

17. - Principio di dualità e principio di trasporto: influenza sulla logica

Fra le teorie sviluppate da Poncelet, merita particolare menzione la teoria della polarità rispetto ad una conica, di cui — come si è accennato — si trovano i primi fondamenti in De La Hire. Appunto colla polarità Brianchon aveva dedotto il teorema sull'esalatero circoscritto ad una conica dal teorema di Pascal sull'esagono iscritto (1817). Poncelet vede nel metodo delle polari reciproche un istrumento che vale in generale a trasformare una qualsiasi proprietà grafica in una proprietà *correlativa* (scambiando « punti » e « rette » nel piano). Si scopre così una *legge di dualità* della geometria proiettiva, analoga a quella che già Snellio aveva messo in evidenza per la geometria sferica. Gergonne concepisce questa legge come un *principio* a priori.

La proprietà della scoperta ha dato luogo ad una contesa fra i due geometri, Poncelet e Gergonne, che non è facile definire: perchè si tratta della lenta evoluzione di un'idea, che segue naturalmente la legge di continuità storica. Non si può negare che Gergonne porga una visione delle cose più vicina a quella che è stata accolta nella concezione attuale della scienza, e possedente un più alto valore logico: sebbene egli non giustifichi a rigore il suo principio, dimostrando la simmetria logica dei postulati che stanno a base della geometria proiettiva; ciò che esige tutta una analisi dei principii della scienza, quale si potrà fare soltanto dopo V. Staudt. Aggiungasi che il valore euristico del principio di Gergonne

non è nemmeno compromesso da un errore in cui egli è caduto, ritenendo che le curve algebriche d'ordine superiore al 2° sieno duali di sè stesse: errore che è stato corretto da Poncelet.

Ora, in attesa che la critica staudtiana consenta di giustificare la dualità secondo la via di Gergonne, PLÜCKER (1828) viene a porgere la chiara dimostrazione analitica, introducendo, accanto alle coordinate dei punti, le coordinate delle rette del piano. E questo procedimento giustificativo gli suggerisce una enorme estensione del principio, che doveva spiegare tutta la sua ricchezza negli sviluppi ulteriori della geometria. Non soltanto le rette del piano, ma anche altri enti qualsiasi che dipendano da un certo numero di variabili o parametri, possono individuarsi mediante questi parametri, assunti come *coordinate*; e se ne trae la conseguenza che: le proprietà relative ad un sistema di enti geometrici qualsiansi si traducono nelle proprietà di un sistema di numeri, che poi potranno interpretarsi come coordinate di altri enti appartenenti ad una diversa famiglia. In questa maniera lo studio di un sistema di enti geometrici qualsiasi — attraverso le diverse interpretazioni della geometria analitica — si riflette nello studio di altri infiniti sistemi geometrici. Questo è il *principio di trasporto di Plücker,* che si può rendere indipendente dall'uso delle coordinate, traducendosi nel concetto della *geometria astratta,* sviluppata massimamente colla geometria degli *spazi a più dimensioni.* La geometria diventa teoria dei sistemi o varietà di enti (elementi), astrattamente designati col nome di « *punti* »; ai quali si dan poi i più diversi significati concreti, facendone nascere le varie interpretazioni di cui la teoria stessa appare suscettibile. Questo concetto non dà soltanto un principio fecondo di unificazione e generalizzazione delle dottrine geometriche, ma contiene altresì un principio di alto significato logico. Essa c'insegna a riguardare le teorie scientifiche logicamente ordinate come sistemi ipotetico-deduttivi, dove i concetti primi non sono altrimenti definiti nel loro contenuto (fisico o intuitivo, ecc.), ma soltanto nei loro rapporti logici, che si esprimono dai postulati.

E non è un caso che la veduta della *definizione implicita* dei concetti — quale riceverà la prima applicazione precisa nei « Grundlagen » di M. PASCH — si sia affacciata per la prima volta da Gergonne, che stabilisce il confronto colla determinazione implicita di più incognite mediante un sistema di equazioni algebriche.

BIBLIOGRAFIA

F. ENRIQUES, *Per la storia della Logica*. Bologna, 1922. Cap. III.

18. - SVILUPPI DELLA GEOMETRIA NELLA SCUOLA FRANCESE

L'impulso dato alla geometria da Monge e da Poncelet si prosegue nella scuola francese, in diversi sensi. Continuatore e divulgatore della geometria proiettiva è Chasles, che — come si è accennato — raccolse i più grandi allori, tanto da essere considerato dai suoi contemporanei « l'empereur de la géométrie ».

MICHEL CHASLES, nato a Epernon presso Parigi nel 1793, appartiene per l'età alla stessa generazione di Poncelet, ma — facendo eccezione alla generale precocità dei matematici — ha una produzione più tardiva. A dir vero egli ha iniziato presto gli studi, come scolaro della Scuola politecnica (1813); però, datosi alla Banca, venne assorbito dagli affari, facendo larghi guadagni. Solo a 44 anni Chasles ritorna alla scienza, pubblicando il suo grande lavoro « Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes de la géométrie » (Bruxelles, 1837). In seguito (1841), diventa professore di Macchine alla Scuola politecnica, e nel 1846 passa alla Sorbona, dove viene fondata per lui una cattedra di geometria superiore. La sua influenza scientifica e didattica va sempre crescendo. Entra all'Accademia nel 1851. Muore a 87 anni, nel 1880.

Un episodio della sua vita accademica ha richiamato su di lui l'attenzione del pubblico. Chasles, che fino dall'« Aperçu » aveva mostrato il più vivo interesse per la storia della scienza, fra il 1861 e il 1869 ha dato alla luce numerosi autografi di

scienziati con rivelazioni impressionanti; ma sulla base di documenti che gli erano forniti da un falsario! La cosa, riconosciuta, ha sollevato un grande scandalo. Alphonse Daudet ha ritratto l'episodio nel suo romanzo anti-accademico « L'immortel ».

Lo straordinario successo scientifico di Chasles è in ragione del talento con cui egli sa esporre e far valere le dottrine della nuova geometria, e del buon gusto con cui sa coltivarle, piuttosto che della potenza della sua originalità. Il « Traité de géométrie supérieure » del 1852 contiene sviluppi di geometria proiettiva che già, assai prima, s'incontrano in Steiner. I suoi contributi a dottrine geometriche più elevate, in ispecie alla geometria numerativa, restano inferiori a quelli di altri studiosi contemporanei, come l'ammiraglio De Jonquières, verso il quale egli non pare essersi comportato sempre correttamente; lo stesso *principio di corrispondenza,* cui ha dato il suo nome (Comptes rendus, 1864), esprime solo in forma astratta osservazioni anteriori di De Jonquières e di Cremona (1).

Tuttavia Chasles serba il gusto delle questioni metriche e dei loro rapporti colla geometria proiettiva, mentre i geometri tedeschi si vanno allontanando da tali argomenti. Codesto gusto è un carattere precipuo della scuola di Monge. Così, p. es., Dandelin aveva dato la costruzione dei fuochi delle coniche sezioni d'un cono rotondo mediante sfere inscritte, e Dupin aveva trovato la conica luogo dei punti dello spazio da cui un'altra conica viene proiettata secondo un cono rotondo. Poncelet spinge avanti le ricerche secondo lo spirito metrico-proiettivo. La sua osservazione che il cerchio è caratterizzato come conica passante per due punti immaginarii all'infinito del piano (i cosidetti punti ciclici) è dallo Chasles estesa alla sfera in rapporto al cerchio immaginario all'infinito, ed è usata come mezzo di dimostrazione elegante. La definizione dell'angolo come logaritmo di un birapporto, recata da Laguerre (1853), si può dire preparata

(1) Cfr. la nota storica di C. Segre in « Bibliotheca mathematica » di Eneström, 1892.

da codesti studi. In genere tale ordine di considerazioni, in cui entrano le rette *isotrope* e poi le *linee di lunghezza nulla*, è genialmente adoperato dai geometri francesi non solo nell'ambito della geometria proiettiva, sì anche nella geometria differenziale. In questo senso l'eredità di Monge e di Chasles è stata raccolta in Francia da GASTON DARBOUX (1842-1917) e l'idea — attraverso Plücker — è passata pure in SOPHUS LIE, che ne ha fatto applicazioni bellissime.

BIBLIOGRAFIA

Ci limitiamo a citare due articoli di carattere elementare:

C. SEGRE, *Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica*. Torino, 1886.

F. ENRIQUES, *Sull'immaginario in Geometria*, « Periodico di Mat. », serie IV, vol. VI, n. 3, 4-1927.

19. - LA GEOMETRIA PROIETTIVA NELLA SCUOLA TEDESCA

La geometria proiettiva passa presto dalla Francia in Germania, e qui il contrasto fra i *sintetici* e gli *analitici*, che si è già visto disegnarsi nella Scuola politecnica di Parigi, diventa opposizione di scuole, nel seno stesso della geometria, complicandosi con rivalità di circoli accademici, fra gli amici e discepoli di Plücker e quelli di Jacobi, accanto a cui fiorisce Steiner. E vi è questo di singolare: che proprio l'influenza scientifica di Jacobi sembra manifestarsi più direttamente sul pensiero di Plücker, innovatore della geometria analitica.

I geometri tedeschi che hanno contribuito alla evoluzione della geometria proiettiva, nel secondo quarto del secolo decimonono, sono Moebius, Plücker, Steiner, e infine Staudt.

AUGUST FERDINAND MOEBIUS, nato nel 1790 a Schulpforta, è figlio di un maestro di ballo e padre di un noto neurologo. Ha studiato con Gauss nel 1813-14, che lo ha avviato alla Astronomia; e come astronomo trova un collocamento a Lipsia nel 1816, diventando poi anche professore all'Università. Muore nel 1868.

La genialità di Moebius rifulge soprattutto nei suoi lavori di geometria. La sua grande opera « Der baricentrische Calcul » pubblicata nel 1827, è il primo lavoro tedesco in cui si fa sentire l'influenza della scuola geometrica francese. Moebius, che ha assimilato il nuovo spirito della geometria, lo traduce in una creazione originale, sia procedendo nel senso della ricerca proiettiva, sia foggiando un istrumento analitico più idoneo per tradurre la nuova scienza. Questo istrumento gli è offerto dall'introduzione delle coordinate baricentriche (il primo sistema di coordinate omogenee), che l'autore stesso dice suggeritogli dalle ricerche sui centri di gravità di Carnot e di L'Huilier, e che risponde bene alla concezione proiettiva togliendo il carattere di eccezione ai punti all'infinito.

Moebius riesce pure a sistemare in maniera soddisfacente la definizione dei *segni* dei segmenti, attribuendo anche un segno alle aree e ai volumi. Ma la sua più bella visione della geometria proiettiva si palesa soprattutto nell'idea delle generali corrispondenze omografiche e correlative fra due piani (o spazii). Che l'omografia (o collineazione) fra due piani sia determinata da 4 coppie di punti omologhi (e fra due spazii da 5) dimostra egli colla costruzione della *rete* cui è rimasto attaccato il suo nome: cioè rilevando che a partire da 4 punti indipendenti del piano (o da 5 nello spazio) si può costruire *linearmente* un insieme ovunque denso di punti — l'anzidetta rete — che, coi suoi punti limiti, invade tutto il piano (o tutto lo spazio).

Julius Plücker è nato nel 1801 ad Aachen (Aquisgrana), dove la sua famiglia era stata bandita dal basso Reno, al tempo delle lotte religiose. Dopo avere studiato a Bonn e a Parigi (1823-24), e conseguito l'abilitazione a Bonn nel 1825, Plücker diviene professore straordinario in questa stessa Università nel 1828 e passa poi (collo stesso grado) a Berlino nel 1832. Qui si acuisce il suo dissidio colla cerchia Jacobi-Steiner e forse anche per ciò egli lascia Berlino, ritornando — in qualità di ordinario — a Bonn nel 1836. Ed ivi rimane fino alla morte, seguìta nel 1868.

L'attività scientifica di Plücker si è volta, oltrechè alla

geometria, anche alla Fisica, in cui ha fatto belle scoperte, nel periodo della maturità, dai quarantasette fino agli ultimi anni della sua vita; soltanto alla fine ha ripreso interesse per la ricerca geometrica.

Plücker geometra ha ricevuto impulso dal suo soggiorno a Parigi e dalle relazioni che ivi ha conservato. I suoi trattati «Analytisch-geometrische Entwickelungen» (1828, 1831) e « System der analytischen Geometrie » (geometria piana, 1834), espongono il nuovo sistema della geometria analitica, in rapporto colla concezione proiettiva, incontrandosi in qualche punto con Moebius, ed oltrepassano già lo studio elementare delle coniche. Le opere succcessive — Theorie der algebraischen Kurven (1839), System der analytischen Geometrie des Raumes (1846) e « Neue Geometrie des Raumes » (spazio rigato, 1868, 1869) — procedono ancor più verso una trattazione generale della geometria algebrica.

Il pensiero fondamentale che ispira l'opera di Plücker è tratto da Monge. Nella prefazione al suo primo trattato (Werke, pg. IX) dice: « Io vorrei dichiararmi contro la veduta che l'Analisi sia una scienza che sta da sè, indipendentemente da ogni applicazione, mentre la geometria — e d'altra parte la meccanica — apparirebbe solo come illustrazione rappresentativa di certe relazioni analitiche fra le grandezze ». E il suo sforzo è sempre di tradurre le combinazioni di formule in immagini geometriche e, viceversa, di risalire da queste a quelle.

Secondo tale spirito egli ha introdotto le coordinate proiettive più generali, ha insegnato l'uso della *notazione abbreviata* (di cui trovava lo spunto in Gergonne), ha visto nella geometria analitica la giustificazione del principio di dualità (come si è spiegato innanzi) ed ha foggiato così l'istrumento per progredire nello studio della geometria proiettiva degli enti algebrici superiori, come diremo in seguito.

Di fronte a Moebius e Plücker, che riescono ad assimilare nel linguaggio della geometria analitica la nuova concezione della geometria proiettiva, Steiner è il geometra sin-

tetico, erede più diretto dell'ideale puristico di Poncelet, al cui genio intuitivo ha soccorso — in qualche modo — la sua stessa ignoranza dell'Analisi, non disgiunta dalla circostanza favorevole di trovarsi a contatto di grandi analisti (Jacobi) a cui ha potuto attingere almeno la visione dei problemi.

Jacob Steiner, nato nel 1796, è figlio di un contadino di Utzendorf. Contadino egli stesso fino ai quindici anni, entra poi nell'istituto pedagogico fondato da Pestalozzi a Iferten, e — compiuta la sua educazione — diventa quivi maestro. In mezzo a difficoltà finanziarie, riesce tuttavia a studiare i geometri francesi (sviluppando spesso questioni proposte dagli Annales di Gergonne), finchè va a Berlino come maestro del figlio di Guglielmo v. Humboldt; coll'aiuto del quale ottiene una cattedra straordinaria all'Università (1834) ed entra anche all'Accademia. Muore nel 1863.

Il contributo essenziale portato da Steiner alla geometria proiettiva è dato dalla « Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander » di cui è stata pubblicata solo la prima parte nel 1832. Steiner spiega il suo *principio di generazione* delle figure: generazione della conica come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci proiettivi di raggi, che si estenderà poi alla definizione di enti geometrici superiori. Il teorema relativo alle coniche è dedotto dal caso del cerchio, ma serve poi a costruire la teoria delle coniche, deducendone i teoremi di Pascal e di Desargues, ecc. Nel 1833 Steiner insegna in modo sistematico la risoluzione dei problemi costruttivi di 2° grado mediante la sola riga ed un cerchio fisso, interamente tracciato, secondo la veduta di Poncelet. Altri contributi ha dato Steiner a diverse teorie geometriche; in ispecie il suo genio geometrico (che, forse esagerando, è stato paragonato a quello di Apollonio) rifulge nella trattazione dei problemi di massimo e minimo (Crelle, 1842) ove egli offre una nuova teoria degli isoperimetri.

Successivamente Steiner ha pubblicato bei contributi alla teoria degli enti algebrici d'ordine superiore, dando spesso degli enunciati senza dimostrazione. Ma il merito di questi lavori, e la stessa onestà scientifica dell'autore, son adom-

brati dall'essersi riconosciuto in essi la conoscenza di fonti inglesi, non confessate. Comunque, alcuni di questi enunciati, di cui l'Accademia di Berlino domandò la dimostrazione per il premio Steiner del 1867, hanno porto l'occasione a ricerche fondamentali sulla superficie cubica, di Cremona e di Schröter.

Attraverso a Moebius, Plücker e Steiner, nel duplice aspetto analitico e sintetico, la geometria proiettiva si è venuta costituendo come corpo di dottrina che persegue lo studio delle proprietà grafiche e proiettive delle figure di per sè, senza riguardo all'interesse delle particolarizzazioni metriche. Tuttavia la base della teoria è sempre nelle nozioni metriche della distanza di due punti o dell'angolo di due rette, che entrano nella definizione del birapporto. In tal guisa, facendo appello alla misura, lo sviluppo della geometria proiettiva viene a introdurre concetti e postulati estranei allo spirito della scienza. Secondo il quale, figure proiettive debbonsi ritenere eguali fra loro, senza nessuna distinzione dei casi metrici; per esempio, nell'ordine delle idee proiettive, il cerchio non appare affatto come una conica più notevole. Perciò, studiate sotto l'aspetto proiettivo, con istrumenti confacenti all'indole delle proprietà che s'indagano, tali figure dovranno presentare le stesse difficoltà di studio.

Lo scopo di rendere indipendente nei suoi principii e nei suoi metodi la geometria proiettiva dalla metrica, caratterizza l'ultimo periodo di sviluppo della geometria proiettiva, in cui essa — per opera di Staudt — riceve il suo assetto definitivo.

Georg Karl Christian v. Staudt è nato a Rothenburg in Baviera nel 1798. Ha studiato ad Erlangen, andando poi a insegnare al Ginnasio di Würzburg (1822), dal quale è passato a quello di Norimberga nel 1825; ove, contemporaneamente, insegnava nella scuola politecnica. Nel 1835 è stato chiamato, come professore ordinario, all'Università di Erlangen, e quivi è rimasto fino alla morte, seguìta nel 1867. « Vita tranquilla di un uomo pieno di bontà e di modestia — dice Corrado Segre —, esempio di costumi semplici e di severa virtù, amante della solitudine, ma gioviale in compa-

gnia, scrupoloso nell'adempimento dei suoi doveri, coscienzioso in tutto ed occupato specialmente dei pensieri della famiglia, delle ricerche scientifiche e dell'insegnamento ».

L'opera dello Staudt, nei suoi primi scritti analitici, riflette l'influenza di Gauss, di cui egli vuole rendere più semplici od elementari talune dimostrazioni, per esempio quella del teorema fondamentale dell'Algebra. Poi lo Staudt si volge a questioni metriche elementari, studiando il triedro (di cui ha introdotto il seno) ed il tetraedro, e passa quindi alla geometria proiettiva: una sua memoria sulle coniche del 1831 si ispira da vicino a Poncelet. Ma più tardi il metodo di deduzione metrico-proiettivo non lo soddisfaceva più. Dopo avere lungamente meditato i lavori di Moebius e di Steiner, Staudt si convince che la geometria proiettiva deve fondarsi con metodo puro, sulla base di concetti e di postulati esclusivamente grafici. E trova i mezzi di realizzare tale intento, attingendo appunto alle idee dei suoi predecessori. Dalla rete di Moebius apprende egli che la collineazione o proiettività fra piani si lascia definire come corrispondenza che conserva le linee rette. E dalla proprietà grafica che Steiner dà del gruppo armonico in rapporto al quadrangolo completo, trae l'idea di definire graficamente la corrispondenza subordinata dalla collineazione piana fra rette omologhe, come corrispondenza che conserva i gruppi armonici: nasce così la famosa definizione delle punteggiate proiettive che lo Staudt pone a base della sua « Geometrie der Lage » (1847). Ora tutta la teoria della proiettività fra le forme geometriche verrà ricostruita, in un ordine d'idee puramente grafiche, ove si stabilisca il *teorema fondamentale della proiettività* (fra punteggiate o fra forme di prima specie), cioè che: la proiettività è determinata dalla corrispondenza di tre coppie di punti omologhi. E così viene elevato l'edifizio dello Staudt. Il quale procede poi a fondare la teoria della proiettività fra piani o forme di seconda specie e, in particolare, dalla correlazione involutoria (polarità) deduce la teoria delle coniche.

Contributi ulteriori alla sistemazione della geometria proiettiva ha dato lo Staudt in altri lavori, specie nei « Bei-

träge zur Geometrie der Lage » (1856, 57 e 60), dove giustifica in modo rigoroso l'uso degli elementi immaginari, e (senza far uso di concetti metrici) introduce le coordinate proiettive.

La sistemazione della geometria proiettiva data dallo Staudt parve, al suo apparire, troppo rigida e severa, tantochè qualcuno (per esempio lo Hankel) le rimproverava la esclusione delle proprietà metriche come contraria alla natura. Il desiderio di coloro che volevano un'esposizione più facile e vicina alle concezioni ordinarie, fu poi appagato dall'opera di TH. REYE « Die Geometrie der Lage » (1866-67) che, in tre volumi, a partire dalla dottrina elementare delle coniche, si solleva allo studio di forme superiori (superficie quadriche e cubiche, complessi di rette, ecc.) sviluppando nel modo più largo il principio della generazione proiettiva quale era stato introdotto dallo Steiner ed esteso poi a diversi casi da Seydewitz (1847), Grassmann (1855) e Staudt (1860) [1].

Frattanto la purezza del metodo con cui è costruita la geometria staudtiana, e il rigore del trattato che, per certi

---

[1] In Italia la geometria proiettiva è stata introdotta anzitutto dagli *Elementi* di L. CREMONA (1873) che definiscono la proiettività a partire dal birapporto, secondo il metodo dello Chasles. Altri trattati posteriori si ispirano al Reye, che è stato tradotto dal FAIFOFER nel 1884. Si deve a C. SEGRE di avere attirato l'attenzione sull'opera dello Staudt, di cui egli stesso ha promosso la traduzione, fatta dal PIERI nel 1889. I corsi di lezioni di Geometria proiettiva appaiono, in quell'epoca, parte ispirati al metodo staudtiano, parte al Reye, specie per quel che concerne la definizione delle coniche, data colla generazione proiettiva invece che colla polarità; alcuni (come il DE PAOLIS a Pisa) semplificavano in questo punto la trattazione del Reye, ricorrendo all'iperboloide, come è fatto anche in trattati posteriori. L'ENRIQUES, che aveva pure adottato questo metodo nelle lezioni litografate del 1896, è ritornato al modello dello Staudt nelle *Lezioni* stampate del 1898. Le quali poi sono state tradotte in tedesco, per iniziativa di F. Klein (1ª ed., 1903, 2ª ed., 1915); più recentemente in francese e in inglese (ed. litografica ad uso degli studenti delle Università americane). In un'epoca più vicina a noi lo studio della geometria proiettiva pura è stato un po' messo da parte nelle nostre Università, prevalendo la fusione della geometria proiettiva colla analitica, in vista delle esigenze di preparazione degli ingegneri.

aspetti, è stato paragonato al modello classico dell'Euclide, han reso possibile l'analisi dei postulati che stanno a base della geometria proiettiva, quale è stata svolta da KLEIN, LÜROTH e ZEUTHEN, DARBOUX, PASCH, DE PAOLIS, ecc. Qui è apparsa una lacuna nella dimostrazione del teorema fondamentale dello Staudt, per colmare la quale occorre la continuità della retta. E Darboux ha ricondotto la questione allo studio dell'equazione funzionale $f(x+y)=f(x)+f(y)$, che caratterizza la funzione $f=ax$.

Infine l'analisi dei principii della Geometria proiettiva è stata completata e sistemata da F. ENRIQUES nelle « Lezioni » del 1898.

BIBLIOGRAFIA

F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*. Bologna, 1898. (Ristampa della 4ª edizione 1926, trad. fr., ted. e inglese).

Per il collegamento di queste *Lezioni* colle vedute dei geometri anteriori allo Staudt:

F. SEVERI, *Complementi di geometria proiettiva*. Bologna, 1906.

Per la storia della geometria proiettiva:

M. CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*. Bruxelles, 1837 (2ª ed. Parigi, 1875).

Prefazione storica ad

HANKEL, *Die Elemente der projektivischen Geometrie*. Lipsia, 1875.

F. ENRIQUES, *Appendice* alle Lezioni citate.

G. DARBOUX, *Études sur le développement des méthodes géometriques*. (Conferenza al Congresso di Scienze ed Arti di St., Louis). Parigi, 1904.

Biografie:

Poncelet, Chasles, in J. BERTRAND, *Eloges académiques*, s. I (1890) e s. II (1902).

Per Moebius cfr. C. REINHARDT, *Ueber die Entstehung und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius*, in M. « Werke », t. IV, pag. 701.

Per Plücker: A. CLEBSCH, *Zum Gedächtnis an Julius Plücker*, in P. « Werke », t. I, pag. IX.

Per Staudt: *Prefazione alla traduzione italiana della Geometria di Posizione* per cura di C. SEGRE.

Per tutti, notizie e confronti nella Storia di F. Klein citata nella bibliografia della Prima Parte.

20. - Sviluppi della geometria algebrica

Ci siamo indugiati sulla genesi della geometria proiettiva elementare, perchè nella revisione dei concetti elementari si spiega appunto la rivoluzione dello spirito geometrico, onde la nuova geometria si distingue dall'antica. Ma è chiaro che il rinnovamento delle idee debba tradursi poi in un impulso a sviluppi superiori della scienza: le vedute che hanno trasformato la teoria delle coniche (o degli enti di 2° grado) condurranno naturalmente a spingere innanzi lo studio delle curve, o in generale degli enti algebrici, d'ordine superiore.

Questo progresso si compie anzitutto sul terreno della geometria analitica; l'assimilazione dei concetti proiettivi che essa fa con Moebius e con Plücker, si prolunga naturalmente in una teoria delle curve piane algebriche d'ordine superiore. D'altra parte lo Chasles, cercando di avvalorare il metodo sintetico (conforme agli insegnamenti di Poncelet) introduce alla base della geometria certi *porismi,* proposizioni che traducono elementari verità dell'Algebra, le quali nella trattazione geometrica, figurano in certo modo come postulati, cui appoggia il ragionamento sintetico. Sebbene l'enunciato stesso di codesti porismi, e peggio ancora la loro presunta giustificazione indipendente dall'Algebra, dieno luogo a critiche e riserve, l'idea ha avuto un notevole valore euristico, permettendo di affinare lo strumento geometrico, a quel modo che è accaduto poi nella scuola del Cremona.

La teoria delle curve algebriche (piane) d'ordine superiore non è nata colla nuova geometria analitica proiettiva. Essa aveva già raggiunto un certo grado di sviluppo agli inizii del secolo XIX: i trattati di Newton (curve del 3° ordine, 1704), di Mac-Laurin (1720, 1748), di De Gua (1740), di Eulero (1748), di Cramer (1750 e di un Anonimo francese (1756), e poi diverse memorie di Poncelet e di Bobillier, segnando le tappe principali dei progressi innanzi alla « Theorie der algebraischen Curven » di Plücker, del 1839.

Ma, in confronto dei modelli più antichi, il nuovo spirito della geometria porta anzitutto la considerazione degli *im-*

maginarii, che viene a modificare tutto il senso della ricerca. Per esempio, Mac-Laurin studia i *flessi* (reali) della cubica e trova che sono *tre*, sopra una linea retta. Ma, per Plücker, considerando accanto ai flessi reali anche gl'immaginari, i flessi di una cubica (generale) diventano *nove*, e danno luogo ad una configurazione molto notevole, poichè la retta che congiunge due di questi punti ne contiene un terzo, sicchè essi stanno a tre a tre sopra 12 rette, ecc.

La maggior parte dei problemi che noi risolviamo oggi nella teoria delle curve non avrebbero senso o avrebbero un senso affatto diverso, senza l'introduzione degli immaginarii; in particolare, grazie a questi, si possono dare valutazioni precise di certi numeri interi (definiti dal grado di date equazioni), che dovrebbero sostituirsi con diseguaglianze ove si imponesse la limitazione della realtà.

Il primo di questi problemi è, si può dire, la valutazione dei caratteri di una curva-inviluppo dati i caratteri della curva-luogo. Poncelet, in confronto di Gergonne che credeva le curve d'ordine n dovere essere anche di classe n, ha riconosciuto che esse sono in generale di classe $m = n(n-1)$, donde appare un « véritable paradoxe » perchè, dualmente, le curve di classe m debbono essere, in generale, d'ordine $n = m(m-1)$. Poncelet spiega il paradosso arrivando così a riconoscere le prime due formule che legano ordine e classe con le singolarità elementari delle curve-luogo o inviluppo, le quali vanno di solito sotto il nome di « formule di Plücker »: a Plücker appartiene la terza formula (espressione del numero dei flessi o altra equivalente).

Ora, senza indugiarci su particolari, diremo che lo sviluppo di una geometria analitica proiettiva ha reagito, a sua volta, sulla comprensione dell'Algebra, dando origine ad un'*Algebra delle sostituzioni lineari*: la quale rispecchia appunto la ricerca sistematica delle proprietà *proiettive* degli enti algebrici, che si traducono appunto in formazioni invarianti per sostituzioni lineari.

Questo indirizzo dell'Algebra attinge i suoi principii formali anzitutto dalla teoria dei determinanti che — dopo Cra-

mer e Lagrange — è stata costruita da Jacobi (1826-41) [1] e si esprime in un *calcolo simbolico* degli invarianti e dei covarianti, quale viene immaginato e sviluppato da CAYLEY, SYLVESTER e BOOLE in Inghilterra, da ARONHOLD e poi da CLEBSCH in Germania, ecc. L'iniziativa del metodo si trova negli iperdeterminanti di Cayley (1845) e poi nella costruzione delle forme invariantive indicata dallo stesso algebrista nel 1846; mentre i più larghi sviluppi sono dati da Cayley stesso e da Sylvester dopo il 1851. La rappresentazione simbolica di Aronhold risale al 1849, e solo più tardi si è riconosciuto che s'identifica, nella sostanza, col metodo di Cayley. Ma, forse in maniera più chiara, essa mette in evidenza la ragione del successo del calcolo simbolico, che non si vede spiegata dai suoi trattatisti, cioè che questo calcolo fa appello ad un principio di degenerazione, includendo una veduta di continuità [2]. Così il concetto di Poncelet s'introduce, quasi di nascosto, in quella teoria analitica della geometria proiettiva che, per taluni aspetti, segna una reazione al pensiero sintetico del geometra francese.

Chi guardi ora allo sviluppo della teoria generale delle curve o degli enti algebrici, verso la metà del secolo decimonono, o poco dopo, è colpito appunto dalla circostanza che il metodo sintetico predicato dagli iniziatori della geometria proiettiva, sembra non dare frutti cospicui oltre il campo elementare delle figure di 2° grado. È possibile che la spinta alla costruzione sintetica della geometria si esaurisca subito progredendo nello studio di enti più elevati, o si risolva nel produrre il più largo sviluppo formale dell'Algebra delle sostituzioni lineari?

Questo dubbio ha una certa apparenza di verità per chi si fermi a considerare lo stato della scienza verso l'epoca sopra indicata. C'è un magnifico progresso della geometria proiettiva degli enti algebrici: ma i resultati ottenuti appartengono, in gran parte, alla scuola dei grandi geometri inglesi

---

[1] Ulteriori progressi della teoria sono dovuti specialmente a F. BRIOSCHI (1854) e R. BALTZER (1857).

[2] Cfr. ENRIQUES-CHISINI, vol. I.

— CAYLEY, SYLVESTER, SALMON (il classico trattatista) — ovvero, in Germania, ad HESSE, continuatore dell'indirizzo di Plücker, e così rientrano nella nuova geometria analitica. È pur vero che questa non si riduce all'uso dell'Algebra degli invarianti, ma appare utilizzare anche il ragionamento sintetico, ad esempio per giustificare a priori la forma di un'espressione analitica di cui poi si determineranno i coefficienti con metodo *sperimentale*, cioè col ricorso ad esempi particolari, ecc.

Ma, di fronte alla geometria analitica, il metodo sintetico, quale viene indicato dallo STEINER, si dimostra di gran lunga meno potente: non solo perchè la trattazione degli enti superiori mediante il principio di generazione steineriano è, in genere, più tardiva, ma anche perchè il principio stesso ha, in fin dei conti, una portata intrinseca assai limitata. La scuola tedesca di THEODOR REYE (1838-919), sviluppando in questo senso la geometria sintetica, ha creato, certo, un corpo di dottrina elegante, ma non si è sollevata sullo studio di enti relativamente elementari.

Frattanto un più alto progresso della geometria si prepara colla elaborazione di metodi e collo spirito nuovo della scuola italiana di LUIGI CREMONA, sulla quale verranno poi a riversarsi anche le influenze esercitate su alcuni geometri tedeschi dal pensiero di B. Riemann.

21. - LUIGI CREMONA E LA SCUOLA GEOMETRICA ITALIANA

Luigi Cremona è nato, nel 1830, da famiglia lombarda, quella stessa cui appartiene il celebre pittore Tranquillo, fratello del matematico. Giovane ardente di patriottismo, Luigi interrompe gli studi per accorrere alla prima guerra d'indipendenza del 1848. E soltanto dopo aver servito 18 mesi sotto le armi, si iscrive, nel 1849, all'Università di Pavia, da cui esce laureato ingegnere nel 1853. Insegna quindi ai Ginnasi di Pavia e di Cremona e al Liceo di Milano (1859), passando di qui alla cattedra di geometria superiore fondata all'Università di Bologna (1860). Ma, accogliendo l'invito del

suo maestro Francesco Brioschi, ritorna a Milano, come insegnante del Politecnico nel 1866. Più tardi, da questo passa a Roma (1873) ove riunisce poi la cattedra di Geometria superiore colla direzione della Scuola per gl'Ingegneri, che tiene fino alla sua morte, seguita nel 1903.

L'indirizzo degli studi del Cremona sembra determinato da due influenze che si sono esercitate sopra di lui: anzitutto dal suo maestro Brioschi, cultore dell'Algebra e della teoria delle forme invariantive, e poi dai geometri stranieri — in ispecie dallo Chasles — in cui ha trovato uno spirito sintetico più consono alla sua particolare mentalità. Riteniamo non indifferente per la formazione del futuro geometra che egli abbia appreso nei suoi primi studi col Brioschi a conoscere profondamente l'Algebra, ed anche che il Casorati gli abbia mostrato il senso funzionale dei problemi algebrici portando a lui un'eco del pensiero di Riemann. Questi elementi che soggiaciono alla cultura del Nostro, spiegano assai bene il suo svolgimento e i limiti del suo purismo.

Nondimeno il Cremona volge gli occhi verso la nuova geometria. « La mia debolezza — scrive allo Chasles nel 1860 — proviene anzitutto dalla mia educazione esclusivamente algebrica, e se i miei occhi si sono aperti al sole della geometria pura, io devo tutta la mia riconoscenza a Voi: è il vostro Aperçu, è il vostro trattato di Geometria Superiore che io benedirò sempre! ».

Ma il Cremona poco si attarda nel campo della ricerca elementare, e dallo Chasles stesso trae i cosidetti *porismi*, senza troppo approfondire se sieno o no giustificati indipendentemente dall'Algebra, e li adopera, insieme ad altri concetti e metodi, come istrumento per raggiungere scopi superiori. Egli attinge anche al De Jonquières i primi principii della geometria numerativa e, in particolare l'uso di quel modo di valutazione del numero, che costituisce il cosidetto *principio di corrispondenza*; da lui stesso — in seguito alle obiezioni dello Chasles — giustificato come valido senza eccezione, quando si tenga conto dei punti uniti all'infinito. E presto apprende anche le dottrine della scuola tedesca, in

ispecie dello Steiner; più tardi quelle dello Staudt, che dapprima giudicò non naturali, per l'esclusione del metrico!

Gli istrumenti anzidetti servono al Cremona per costruire la « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » del 1862. L'anno appresso (1863) egli scopre le trasformazioni birazionali del piano, che sono rimaste nella scienza col nome di *trasformazioni cremoniane*. E certo questo concetto esercita un'influenza sull'orientamento scientifico dei geometri che traducono nel linguaggio della teoria delle curve il pensiero riemanniano: Clebsch e Nöther.

Poco appresso il Cremona s'incontra appunto con codesti geometri in ricerche concernenti la rappresentazione piana delle superficie: per suo conto egli ha iniziato tali studi colla memoria sulle superficie cubiche del 1868, cui fu conferito il premio Steiner dell'Accademia di Berlino; la quale fa seguito ai « Preliminari di una teoria geometrica delle superficie » (1866-67).

L'opera costruttiva del Cremona, fino dal suo primo trattatello sulle curve, ha avuto nel mondo scientifico il più largo successo: non tanto per i resultati nuovi che lo studio delle curve contenga, in confronto per esempio alla trattazione del Salmon, quanto per il metodo rispondente ad un desiderato dei geometri contemporanei. Appariva ormai che il ragionamento sintetico può emulare il metodo algebrico, almeno se si accettino alcune premesse tratte dall'Algebra stessa. Ad ogni modo il Cremona insegnava a vedere nei problemi geometrici, comunque si vogliano trattare, non già l'aspetto formale della rappresentazione algebrica, bensì il vero significato qualitativo, che diverrà poi funzionale. A quest'ultimo significato, che sarà compreso più intimamente dalla sua scuola, il Cremona stesso non rimase del tutto estraneo, avendo accolto indirettamente alcune vedute riemanniane, traverso il collega Casorati, ed essendosi così preparato a intendere il senso degli sviluppi del Clebsch.

Il Cremona ha esercitato larga influenza sulle matematiche italiane fondando una scuola: la più diffusa e d'altra parte la più coerente, in confronto a quelle che si raccolsero intorno agli altri grandi maestri della medesima generazio-

ne. Sono fra i suoi scolari più diretti RICCARDO DE PAOLIS (che abbiamo avuto come maestro a Pisa negli anni 1889-91), il quale si è incontrato col Kötter nella costruzione di una teoria geometrica pura delle curve d'ordine superiore, ed ETTORE CAPORALI, divenuto professore all'Università di Napoli: ambedue morti giovani. Poi EUGENIO BERTINI, fino a ieri nestore della nostra scienza, che — col problema della classificazione delle involuzioni piane — è entrato per primo nel campo della geometria delle trasformazioni birazionali. Ma tutti i geometri formatisi prima del 1900 hanno subito l'influenza, diretta o indiretta, del Cremona; ed anche noi abbiamo avuto la fortuna di ascoltarlo a Roma, come studente di perfezionamento nel 1892-93. In senso più o meno largo si riattaccano pure alla scuola cremoniana GIUSEPPE VERONESE (1863-924) e CORRADO SEGRE (1854-917), che ambedue ricevendo, in sensi diversi, un impulso dal Klein, hanno allargato le prospettive dei geometri collo studio degli spazi a più dimensioni, attraverso al quale si è presentata per la prima volta in Italia una comprensione più profonda della geometria sopra la curva.

BIBLIOGRAFIA

LUIGI CREMONA, *Opere matematiche*. 3 vol. 1914, 16, 17.

EUGENIO BERTINI, *Della vita e delle opere di Luigi Cremona*, in CREMONA, *Opere*, vol. III, pag. V.

22. - CLEBSCH E NÖTHER

Per i progressi ulteriori della geometria algebrica è essenziale il connubio fra le vedute geometriche e la teoria delle funzioni avvenuto nella scuola di Riemann, per opera di ALFRED CLEBSCH e MAX NÖTHER.

Laddove Riemann aveva rappresentato l'ente algebrico $f(xy)=0$ con una superficie luogo dei punti (xy) reali e complessi che soddisfano all'equazione data (superficie di Riemann), Clebsch si riferisce alla *curva* che così viene definita nel piano (xy). C'è qui una nuova forma d'intuizione del-

l'ente, che deriva dalla considerazione dei *punti reali* della $f=0$. Se, con Plücker, si aggiungono a questi anche i *punti immaginari* o complessi, sembra a prima vista che si dovrebbe rinunziare all'immagine di una curva e tornare — con Riemann — a quella di una superficie o continuo a *due* dimensioni. Parlare ancora di curva « luogo di punti reali ed immaginarii » significa, in verità, conservare dell'intuizione dell'ente reale qualcosa che deve essere giustificato. Essenzialmente si tratta di spiegare perchè sia lecito ancora di ritenere l'esistenza di *un punto infinitamente vicino* ad un punto dato, in luogo di infiniti punti, come appaiono nel continuo a due dimensioni. E la giustificazione dipende da ciò che, nel campo complesso, le funzioni di una variabile posseggono in ogni punto una derivata indipendente dalla direzione d'avvicinamento: in linguaggio geometrico, la curva possiede, in ogni suo punto semplice, *una* tangente.

Il modello dell'ente algebrico assunto da Clebsch, mette in evidenza nuovi significati per i caratteri che intervengono nella teoria riemanniana. Così il « numero degli integrali abeliani di prima specie », che è anche la metà dell'ordine di connessione della superficie di Riemann, si rispecchia in quel carattere di cui Clebsch si vale per classificare le curve in « generi » e che perciò ha ricevuto il nome di *genere* della curva: precisamente p è il numero dei punti doppi che manca alla curva d'ordine n con d punti doppi per averne il massimo:

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d.$$

Ora l'interpretazione della teoria riemanniana in rapporto alle curve, porta la conseguenza di scoprire in essa un contenuto più nettamente algebrico; per esempio del genere si mette in evidenza che dovrà costituire un'invariante della curva rispetto a trasformazioni birazionali.

Nella luce del concetto cremoniano della trasformazione, tutta la teoria verrà ad apparire come una nuova dottrina delle curve, dove si ricercano, non più le proprietà proiettive, ma quelle che sono invarianti per trasformazioni birazionali (del piano o anche solo della curva di cui si tratta).

In questo senso appunto Nöther, con la collaborazione di A. Brill, ha sviluppato la teoria delle funzioni razionali dei punti di una curva, che — in termini geometrici — diviene teoria delle *serie lineari di gruppi di punti*. Qui, in particolare, il celebre teorema di Riemann-Roch — che dà la dimensione della serie completa ovvero il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende una funzione razionale con dati poli — riceve una ingegnosa dimostrazione geometrica, che dipende da un teorema sulla rappresentazione di una forma algebrica per combinazione di due altre $(Af+B\varphi)$; questo teorema estende e precisa i resultati dei geometri precedenti sui gruppi di punti intersezioni di due curve (teorema dei nove punti comuni a due cubiche, ecc.); esso è stato stabilito da Nöther in tutta la sua generalità.

Nöther non si è fermato alla geometria delle curve, ma con forte intuizione ha espresso anche le prime idee relative alle superficie (per le quali già Clebsch definiva, trascendentemente, il genere) affrontando arditamente i difficili problemi che si riferiscono a questi enti (funzioni di due variabili indipendenti) considerati di fronte alle trasformazioni birazionali. Però dopo aver conseguito, in questo campo, alcuni importanti resultati preliminari, doveva presto arrestarsi, lasciando ad una generazione successiva di ritornarvi coll'ausilio di più affinati metodi ed istrumenti di ricerca.

Fra i resultati conseguiti dal Nöther vogliamo segnalare quelli che si riferiscono alle superficie razionali, dove si vedono oltrepassate le vedute di Cremona e di Clebsch: giacchè, per Nöther, non si tratta più di ricercare la rappresentazione piana di particolari superficie di dato ordine, ma di dedurre in generale la razionalità dall'esistenza di un fascio lineare di curve razionali, ovvero di classificare — rispetto alle trasformazioni cremoniane del piano — le curve $f(xy)=0$, per cui la superficie $z^2=f(xy)$ riesce razionale. Quest'ultima ricerca — concernente i *piani doppi razionali* — viene ad incontrarsi con quella di Eugenio Bertini che intraprende a classificare le *trasformazioni cremoniane involutorie*. Anche il Bertini si solleva sulle vedute dei geometri proiettivi, intenti a descrivere diverse proprietà di codeste trasformazioni

(in ordine alla loro classe, ecc.), per indagare i tipi distinti a cui le involuzioni possono ridursi per trasformazioni cremoniane del piano stesso.

Egli perviene a tre tipi d'involuzioni che rispondono ai tipi dei piani doppi di Nöther e si deducono da quelli colle trasformazioni (1, 2) studiate dal De Paolis. Le lacune che permangono nella trattazione di Bertini, come in quella di Nöther, sono state colmate più tardi da Castelnuovo-Enriques, e così viene eliminato il dubbio che le classificazioni ottenute non sieno complete.

BIBLIOGRAFIA

F. Enriques, *Lezioni su le superficie razionali* pubblicate per cura di F. Conforto. Bologna, 1938.

23. - Iperspazi

La geometria delle trasformazioni birazionali, in ispecie la geometria sopra la curva, si è compresa più profondamente nella scuola italiana traverso la geometria degli iperspazi.

L'idea degli spazi o varietà a più di tre dimensioni, ha origini assai lontane. Già M. Stifel nel 1553 notava che si può andare oltre la superficie e il solido considerando grandezze a quattro o più dimensioni. Più tardi Lagrange diceva che la meccanica è una geometria a quattro dimensioni. Argand (1813), studiando la rappresentazione dell'immaginario, accennava che dal piano o dallo spazio ordinario bisogna salire a forme a più dimensioni. E Jacobi si valeva del linguaggio pluridimensionale nella teoria della riduzione delle forme quadratiche (1834).

La concezione di un ordine multiplo di elementi (in cui rientra l'ordine dei « punti » del continuo ad 1, 2 o 3 dimensioni) viene espressa, in generale, dal filosofo Herbart, che ha esercitato un'influenza su Grassmann e su Riemann. H. Grassmann, nel 1844, pone esplicitamente come oggetto di studio la *grandezza estensiva* che abbraccia le varietà ad n

dimensioni. Nello stesso anno appaiono anche i primi studi di CAYLEY (1844-47) dove le varietà a più dimensioni sono considerate sotto un aspetto esclusivamente algebrico.

Questi ultimi studi hanno avuto qualche eco in Inghilterra, mentre le idee di Grassmann passavano ancora inosservare; basti citare Sylvester (1850), Schäfli (1850) e Salmon (1857).

Ma il concetto delle varietà a più dimensioni ricompare in Germania, colla celebre dissertazione di RIEMANN « sulle ipotesi che stanno a base della Geometria » (1854); qui la varietà ad n dimensioni viene definita mercè la sua generazione come luogo di una varietà ad $n-1$ dimensioni variabili in modo continuo.

Dopo Riemann, e in connessione colle sue idee, la geometria a più dimensioni riceve incidentalmente qualche sviluppo: in Francia da Jordan e Halphen dopo il 1870, in Italia da Enrico D'Ovidio (1877). Essa doveva apparire in una luce più significativa come interpretazione astratta dello studio di diversi enti geometrici, secondo il principio di Plücker. Un discepolo di Plücker, FELIX KLEIN, ha recato un esempio suggestivo, allorchè ha insegnato a considerare lo *spazio rigato* come una *quadrica dello spazio lineare a cinque dimensioni* (*Math. Annalen,* Bd. 5, 1872). E in una Nota del suo celebre « Programma » di Erlangen, insisteva sul significato matematico della geometria pluridimensionale. Crediamo si possa vedere qui l'inizio del nuovo movimento d'idee intorno alla *geometria proiettiva* degli iperspazi. Dopo poco tempo vedono la luce, in più o meno stretto rapporto colle influenze kleiniane, lavori dove l'iperspazio lineare diventa oggetto di studio sistematico:

W. K. CLIFFORD « On the classification of loci », 1879.

GIUSEPPE VERONESE « Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens » (*Math. Ann.* 19, 1882) e

CORRADO SEGRE « Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni » (Memorie della R. Accademia di Torino, 1884).

Alle quali memorie seguono, particolarmente in Italia, altre numerose ricerche.

Per intendere bene il sentimento che ispira soprattutto la produzione del Veronese, conviene ricordare le opposizioni che, fin dai suoi inizii, la geometria a più di tre dimensioni non ha mancato di suscitare. Uno spirito colto ed acuto come quello del Genocchi diceva di non voler parlare della geometria a n dimensioni: Analisi travestita sotto il nome di geometria. Egli faceva risalire questo studio ai *luoghi analitici* di Cauchy (1847); ma aggiungeva che per mezzo dei sedicenti spazi, di cui non possiamo farci alcuna idea, si spoglia la geometria di ciò che forma il suo vantaggio e la sua attrattiva particolare, cioè della proprietà di dare una rappresentazione sensibile dei resultati dell'Analisi e s'introduce al suo posto il difetto contrario; perchè dei resultati, che non avrebbero nulla di urtante sotto la loro forma analitica, non offrono più alcuna preso allo spirito o appaiono assurdi quando si esprimono nel linguaggio geometrico, supponendo punti, linee e spazi che non hanno alcuna esistenza reale, repugnano al senso comune e oltrepassano la nostra intelligenza.

Il Veronese prende di petto gli avversari degli spazi a più dimensioni; egli vuol familiarizzare i geometri coll'intuizione delle figure che ad essi appartengono, dove si pensi il « punto », loro elemento generatore, secondo la comune immagine che ce ne formiamo. Sotto questo aspetto si può dire che gli spazi a più dimensioni si lascino generare, in via ricorrente: lo spazio a quattro dimensioni per proiezione dello spazio ordinario a tre, da un punto esterno, e similmente lo spazio a cinque dimensioni, S_5, per proiezione di un S_4 e così via.

Questa maniera di procedere sembra, a prima vista, legata alla questione filosofica, e non matematica, della possibilità di estendere il nostro continuo spaziale in un continuo a più dimensioni; ma, in realtà, quando si sia giustificato in altro modo l'esistenza di spazi — o varietà — a quante si vogliano dimensioni, è lecito sempre pensare le figure in essi contenute, rappresentandosi come « punti »,

« linee », « superficie » e « solidi » ordinarii, le parti loro che sono rispettivamente a zero, una, due e tre dimensioni. E quindi si riesce a rappresentarsi gli spazi stessi secondo la generazione anzidetta. Solo convien dire che è logicamente errato il ragionamento dell'autore, il quale crede *dimostrare* l'esistenza di punti fuori di uno spazio dato, pensando un punto di esso in un tempo successivo: infatti quando si fa il confronto colla proiezione, la nota differenziale del tempo per cui il punto usciva fuori dal dato spazio viene tolta e il punto suddetto ricade nello spazio medesimo!

Nel concetto del Veronese l'uso degli spazi a più dimensioni deve recare alla geometria ordinaria specialmente il profitto che si può trarre dal considerare certe figure come proiezioni di figure iperspaziali. Così, per esempio, la superficie romana di Steiner (superficie del 4° ordine dotata di tre rette doppie per punto triplo) appare proiezione di una superficie del 4° ordine, non rigata, dello spazio S_5 che viene rappresentata sul piano dal sistema completo delle coniche e che — per essere stata studiata da lui — ha ricevuto appunto il nome di *superficie di Veronese*.

Di fronte al Veronese, il Segre mette in luce specialmente l'uso degli iperspazi che risponde al concetto della geometria proiettiva astratta, vedendo dunque nelle forme degli spazi a più dimensioni l'immagine delle più diverse famiglie di enti, geometrici o anche analitici. In questo senso appunto si trovano negli studi del Segre numerose applicazioni allo spazio rigato, ritenuto — secondo la rappresentazione del Klein — come una quadrica dello S_5. E la superficie del Veronese ritrova egli partendo dall'interpretazione della geometria del piano ove si assumono come elementi le « coniche ». Non sono nemmeno escluse le applicazioni nel senso del Veronese; per esempio, la superficie del 4° ordine con conica doppia viene studiata dal Segre quale proiezione della superficie intersezione di due quadriche nello S_4.

C. Segre ha studiato, da una parte, le questioni più elementari cui danno luogo gli spazi a più dimensioni (quadriche, problemi d'incidenza fra rette e piani nello S_4, varietà cubiche dello S_4, ecc.), dall'altra i problemi che si legano a

diverse teorie analitiche, come la classificazione delle omografie e dei relativi spazi di punti uniti, in rapporto ad un celebre teorema di Weierstrass sulle forme bilineari: ed il problema di questa classificazione ha ricevuto una completa risposta col lavori di Pilo Predella (in cui interviene la considerazione dei punti uniti multipli).

Sempre intento ad allargare la sfera d'idee dei geometri, il Segre ha dato anche impulso alle questioni di geometria enumerativa, che hanno ricevuto notevole sviluppo nella sua scuola; frattanto egli rivolgeva anche la sua attenzione alla geometria sopra una curva, concepita come studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, i cui concetti divenivano chiari per lui in relazione alla geometria proiettiva degli iperspazi.

Tradurre le proprietà delle serie lineari di gruppi di punti in proprietà proiettive delle curve appartenenti a spazi di quante si vogliano dimensioni, e così rendersi conto del legame che passa fra le serie complete e le curve normali (che non sono proiezioni di curve di uno spazio superiore), queste ed altre simili vedute spiegate dal Segre, costituiscono una novità relativa che oggi si è disposti ad apprezzare tanto meno perchè taluni sviluppi venivano dati in forma un po' complicata, ed invece si sono ridotti a dimostrazioni semplicissime, ritornando alle concezioni di Riemann. Ma sotto l'aspetto storico bisogna rendersi conto della difficoltà che offrivano allora tali idee ad essere assimilate dai geometri italiani, anche perchè l'esposizione del Nöther è generalmente così oscura che gli studiosi hanno dovuto, quasi in ogni campo, ricostruire laboriosamente da sè i resultati raggiunti nelle di lui memorie.

La traduzione della geometria delle trasformazioni birazionali delle curve nel linguaggio della geometria proiettiva degli iperspazi, non allarga veramente quella geometria ma ne fa comprendere la larghezza; rendendosi indipendenti dal particolare modello delle curve piane, i geometri sono indotti a vedere in altra luce i problemi e quindi anche ad esaminarli in nuovo modo. Così la dimostrazione del teorema di Riemann-Roch — che Nöther aveva svolto sulla base del teo-

rema dell'$Af+B\varphi$ — appare a GUIDO CASTELNUOVO dipendere da un problema numerativo e riceve quindi una nuova dimostrazione in tale ordine d'idee (1889).

BIBLIOGRAFIA

GIUSEPPE VERONESE, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare*. Padova, 1891.

Gli sviluppi della geometria proiettiva degli iperspazi hanno formato oggetto di una esposizione sistematica nel trattato di

EUGENIO BERTINI, *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi*. Pisa, 1907.

Un resoconto più completo delle teorie della geometria proiettiva iperspaziale è dato da

CORRADO SEGRE, *Mehrdimensionale Räume* in « Enc. Math. Wiss. », III, C. 7.

La teoria delle curve, secondo il metodo di Segre e Castelnuovo è stata esposta da

C. SEGRE, *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*. « Annali di Mat. », 1894.

Nello stesso volume degli « Annali »:

E. BERTINI, *La Geometria delle serie lineari sopra una curva piana, secondo il metodo algebrico*.

Cfr. G. CASTELNUOVO, *Memorie scelte*. Bologna, 1937,

e i trattati di cui nella bibliografia del § seguente.

24. - EVOLUZIONE ULTERIORE DELLA GEOMETRIA DELLE TRASFORMAZIONI RAZIONALI

Colla pubblicazione delle indicate memorie di Segre e Bertini, relative alla geometria sopra le curve, si può far terminare un periodo di attività della scuola geometrica italiana. Un altro periodo s'inizia cogli studi tendenti a costituire una generale teoria algebrico-geometrica della superficie.

F. ENRIQUES nelle « Ricerche di geometria sulle superficie algebriche », pubblicate fra le memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino del 1893, rielaborando i principii esposti dal Nöther (nei due lavori dei *Math. Annalen*, T. II e VIII)

imprende a costruire la nuova teoria degli invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali, svolta successivamente da lui stesso in memorie del 1896 e del 1900; mentre G. CASTELNUOVO riesce a portare un contributo preciso alla teoria delle superficie razionali colla dimostrazione della razionalità delle involuzioni piane (1893).

Non entra nel nostro programma di esporre gli sviluppi che prendono origine da queste ricerche. Ci limiteremo a rilevare che i progressi realizzati nel campo delle superficie si rispecchieranno anche in una nuova maniera di concepire la geometria sopra le curve: da essi verranno, anzitutto la dimostrazione diretta dell'invarianza per trasformazioni birazionali della serie canonica, segnata sopra una curva d'ordine n dalle curve aggiunte d'ordine $n - 3$ (Enriques, 1899), e poi la trattazione più rigorosamente invariantiva della teoria, che si sostituirà alla trattazione iperspaziale: un progresso analogo a quello per cui si passa dalla geometria metrico-proiettiva di Poncelet alla geometria proiettiva pura di Staudt.

La geometria algebrica delle trasformazioni birazionali, così com'è venuta sviluppandosi ed atteggiandosi nella scuola italiana, è ormai ben lungi da quel purismo che contrassegna lo spirito della geometria agl'inizii del moto rinnovatore del secolo decimonono. La nostra disciplina tocca da una parte alle più profonde dottrine dell'Algebra e dall'altra alla teoria delle funzioni ed in ispecie degli integrali di funzioni algebriche, e così anche alla topologia. La mentalità del geometra, libera da ogni pregiudizio di metodo, appare sempre disposta a superare i limiti di ogni particolare teoria, per riconoscere l'unità del problema che sta sotto la ricerca geometrica o analitica: anche — se si vuole — a ricondurre questo all'Analisi. E tuttavia manifesta certi caratteri particolari. C'è, prima di tutto, un interesse per le questioni qualitative (o funzionali) in confronto delle questioni quantitative, dove si tratta della espressione analitico-formale e del calcolo numerico. E poi una visione induttiva per cui il geometra ama passare dal particolare al generale, e in ogni caso vuol rendersi conto della ragione intima del problema,

rifiutandone ogni posizione artificiosa e male accettando resultati che piovano dall'alto come dono del cielo; si potrebbe dire una mentalità, in qualche modo sperimentale, nel senso che la parola può avere nelle Matematiche. Quali che siano per essere gli svolgimenti ulteriori della nostra scuola e le interferenze dei temperamenti personali, e comunque volgano le sorti della geometria algebrica, nella continuità del progresso scientifico italiano e mondiale, la mentalità che abbiamo descritto rappresenterà sempre un aspetto interessante della mentalità matematica; il suo ufficio storico potrà trasformarsi, e forse anche trasferirsi da un ramo ad un altro della scienza, ma non sembra invece che possa definitivamente esaurirsi. E, del resto, il passato delle dottrine ce la fa ritrovare in varie forme, come elemento costitutivo essenziale nello sviluppo delle nostre discipline.

BIBLIOGRAFIA

L'esposizione più completa della geometria algebrica secondo le vedute della scuola italiana, trovasi nei trattati di:

F. Enriques e O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, in 4 vol. Bologna, 1915, 1918, 1924, 1934. (Il 3° vol., relativo alla geometria sopra le curve, trovasi tradotto in francese presso Gauthier et Villars, Parigi, 1926).

F. Enriques e F. Conforto, *Lezioni su le superficie razionali*. Bologna, 1938.

F. Enriques e L. Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*. Padova, 1932.

Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero, in «Rendiconti del Seminario matematico di Roma», 1934.

Per la geometria sopra le curve cfr. anche:

F. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, P. I: *Geometria delle serie lineari*. Bologna, 1926.

Lo sviluppo della geometria nella fiorente scuola di Cambridge si rispecchia nel trattato:

H. F. Baker, *Principles of Geometry*, vol. I-VI. Cambridge, 1929-33.

Di fronte alla teoria algebrico-geometrica delle superficie, coltivata, come si è detto, dalla scuola italiana, si ha lo sviluppo della teoria trascendente per opera di Picard:

E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*. Parigi, 1897-1906.

Una nota addizionale a questo trattato, di Castelnuovo-Enriques, rende conto dei risultati della scuola italiana, in particolare per ciò che concerne i rapporti della teoria trascendente colla teoria algebrico-geometrica.

Per gli sviluppi ulteriori della teoria dal punto di vista topologico:

S. Lefschetz, *Topology*. New-York, 1930.

F. Severi, *Conferenze di Geometria algebrica*, raccolte da B. Segre. Roma, 1928.

Per la storia e la critica dei concetti della geometria algebrica, oltre ai trattati citati, vedansi:

C. Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, « Rivista di Matematica ». Torino, 1891.

U. Amaldi, *Sullo sviluppo della Geometria in Italia*. « Atti della Soc. It. per il progresso delle scienze », 1911.

L. Berzolari, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, in « Enc. der Math. Wiss. », III, 11, 1932.

Uno studio storico che approfondisce la visione dei problemi toccando ai più diversi aspetti delle funzioni algebriche è:

A. Brill e M. Nöther, *Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuer Zeit*, fra i *Berichte der Deutschen Mathematischen Vereinigung*, 1894.

Per l'evoluzione delle idee concernenti le superficie conviene riandare, oltrechè alle memorie originali, ai rapporti di Castelnuovo-Enriques che segnano tappe successive dei progressi di codesta teoria:

Castelnuovo-Enriques, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, « Math. Ann. », Bd. 48, 1897.

Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques. Nota 5 al citato *Traité* di Picard et Simart.

Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus, in « Enc. der Math. Wiss. », III, 1914.

Si confrontino anche:

H. Geppert, *Die Klassification der algebraischen Flächen*, in « Jahresbericht der deutschen math. Vereinigung, 1931.

O. Zariski, *Algebraic Surfaces*. Berlino, 1935.

S. Lefschetz, *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*. « Mémorial des sciences matéhmatiques ». Paris, 1929.

A. Rosenblatt, *Varietà algebriche a tre e più dimensioni*. « Atti del Congresso Int. dei Matematici ». Bologna, 1928.

25. - Geometria non-euclidea

Il rinnovamento della geometria nella scuola francese alla fine del secolo XVIII, si accompagna ad una revisione critica delle dimostrazioni e dei principii che reggono l'antico trattato euclideo. Specialmente la questione delle parallele suscita l'interesse dei geometri. Già D'Alembert, nel 1759, aveva detto: « La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles, sont l'écueil et le scandale des éléments de Géométrie », e aveva sfidato gli studiosi a dimostrare che la retta congiungente due punti equidistanti da un'altra è luogo di punti equidistanti da questa. Lagrange, verso la fine della sua vita, aveva presentato all'Accademia di Francia una memoria sul postulato delle parallele, ma — come racconta De Morgan — interruppe la lettura esclamando: « Il faut que j'y songe encore! ». L. Carnot e S. Laplace s'interessavano pure alla questione, ritenendo che il modo più naturale d'introdurre in geometria ciò che occorre per lo sviluppo della teoria delle parallele sia di postulare l'esistenza di figure simili e non eguali (secondo l'osservazione già fatta da Wallis). E Laplace collega anzi codesta veduta alla legge di gravitazione universale (1824). Ancora Cauchy completa la teoria euclidea dell'eguaglianza dei poliedri: Monge e Fourier discutono sulla definizione della linea retta, che Fourier vuol ricondurre al concetto primitivo della distanza e della sfera, così come è stato sviluppato più tardi dai fondatori della geometria non-euclidea.

Ma il più largo impulso alla critica dei principii e in ispecie allo studio della questione delle parallele è venuto dai tentativi di A. M. Legendre, nelle successive edizioni dei suoi « Eléments de Géométrie » (1794-1823). Il confronto del Legendre coll'Euclide riesce sommamente istruttivo. Bisogna dire che il geometra francese è ben lungi dal comprendere tutta la raffinatezza logica del suo antico predecessore; ma d'altra parte egli lo supera in diversi punti, ove è ammae-

strato da un'esperienza storica di due millenni. E questo è il più importante per noi.

Attraverso i suoi numerosi e svariati tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele, Legendre — oltre a divulgare enormemente l'interesse per la questione — ha anche diffuso la conoscenza di alcuni resultati fondamentali, a cui egli personalmente è giunto, ma che — in verità — si trovano già in lavori anteriori di GEROLAMO SACCHERI (Euclides ab omni naevo vindicatus, 1733) e di J. H. LAMBERT (1766).

Comunque, la situazione della critica euclidea, dopo i tentativi di Legendre, si può riassumere come segue: Se, in luogo di assumere il postulato (che porta l'unicità della parallela per un punto ad una retta data), si cerca di porgerne la dimostrazione per assurdo, partendo dalla sua negazione, si riesce, in verità, a riconoscere il legame che intercede fra alcune proposizioni fondamentali e il detto postulato. Nella negativa di esso la somma degli angoli di un triangolo resulterebbe, non più uguale a due retti, anzi sempre minore, ecc.

Così la via per cui si sono messi i geometri per tentare la dimostrazione del postulato d'Euclide — l'attesa di un assurdo che si riveli nello sviluppo deduttivo dell'ipotesi non-euclidea — doveva naturalmente far sorgere il dubbio se veramente la detta ipotesi involga un assurdo, ovvero possa proseguirsi illimitatamente senza contraddizione; in altre parole, se il postulato d'Euclide sia o meno una conseguenza di quei principii (sull'appartenenza di rette e piani, sulla congruenza, ecc.) che ne precedono l'uso, nelle prime 28 proposizioni degli « Elementi ».

Come accade nella storia del pensiero scientifico, una grande idea si vede qui preparata secondo la legge fondamentale della continuità storica. E perciò non reca meraviglia che la stessa idea si affacci, in diversi modi, indipendentemente, a diverse mentalità: a GAUSS, a SCHWEIKART, a LOBATSCHEWSKI e BOLYAI. Ciò che il primo ha fatto in questo senso, precorrendo gli altri, è venuto in luce soltanto dalla pubblicazione della sua corrispondenza; durante la vita egli si era astenuto dal far conoscere i suoi sviluppi, temendo

« lo stridore dei beoti ». E quindi l'onore della scoperta pubblica è stato lasciato da lui ai due più giovani: al geometra russo e all'ungherese, di cui è venuto a sanzionare le costruzioni, colla sua imponente autorità.

La storia di queste scoperte, che per una parte germogliano nella mente di Gauss e di Schweikart, intorno al 1816, e d'altra parte vengono alla luce verso il 1830, da due giovani oscuri, che lavorano all'insaputa l'uno dell'altro, in lontani paesi, presenta un interesse quasi drammatico.

Nicola Yvanovic Lobatschewsky (1793-1856) ha studiato matematiche all'Università di Kasan, sotto la direzione del tedesco Bartels, amico e compaesano di Gauss, da cui potè ritrarre l'interesse per la questione delle parallele; sembra però che Bartels non abbia avuto comunicazioni con Gauss dopo il 1807, sicchè non potrebbe essersi esercitata su di lui, e per suo mezzo su Lobatschewsky, una influenza del maestro di Gottinga, nel periodo in cui egli stesso aveva maturato la nuova concezione nella Geometria non-euclidea. D'altronde si vede Lobatschewsky arrivare, per proprio conto, e assai lentamente, a codesta nuova concezione. Prima del 1823 egli riteneva di poter giungere alla dimostrazione del postulato delle parallele; e solo fra il 1823 e il 1825 le sue idee si orientano verso una geometria indipendente dall'ipotesi d'Euclide. Nel 1826 espone le sue vedute in una lettura all'Università di Kasan e più tardi le pubblica in memorie a stampa del 1829-30 e seguenti, fino alla esposizione riassuntiva « zur Theorie der Parallellinien » (Berlino, 1840) e ad un'esposizione francese del 1855.

L'idea filosofica che ispira le ricerche di Lobatschewsky, è spiegata da lui stesso, in una memoria del 1835. Dice:

« L'infruttuosità dei tentativi, fatti dal tempo di Euclide, per lo spazio di due millenni, svegliò in me il sospetto che nei dati stessi non fosse ancora contenuta la verità che si era voluto dimostrare e che alla sua conferma potessero servire, come nel caso di altre leggi naturali, delle esperienze, ad esempio delle osservazioni astronomiche ».

Così lo spazio non è più, per Lobatschewsky, come per Kant, una intuizione a priori secondo la quale debbansi in-

terpretare le esperienze, ma una costruzione che risponde ad una realtà fisica e sperimentale, che esperienze più precise potrebbero correggere. Lobatschewsky stesso ha esaminato ciò che risulta dalla parallasse di Sirio, deducendone l'ordine di approssimazione in cui lo spazio fisico può tenersi effettivamente come euclideo.

Johannes o Giovanni Bolyai (1802-1860) di Bolya in Ungheria, era figlio di Volfango ufficiale nell'esercito austriaco e amico di Gauss. Il padre, che aveva consumato lunghi anni nella ricerca di una dimostrazione del postulato delle parallele, spinse il giovane ad occuparsi del problema, proprio col suo consiglio di non spendere in esso un tempo infruttuoso. Cominciò, naturalmente, anche il figlio, con tentativi erronei, ma il riconoscimento degli errori commessi l'avviò, dopo il 1820, sulla buona strada. Nel 1823 lo vediamo già in possesso delle nuove idee. Il 3 novembre di quell'anno egli scrive al padre:

« Sono ormai risoluto a pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele.... la via che ho seguito ha, per così dire, quasi raggiunto lo scopo.... ho scoperto cose così belle che ne sono rimasto abbagliato.... Dal nulla ho creato un nuovo mondo ».

E Volfango gli rispose esortandolo a non tardare la pubblicazione ed offrendogli di aggiungere un'Appendice al suo *Tentamen*. Con mente quasi presaga gli dice:

« .... c'è qualche verità in ciò, che parecchie cose hanno una stagione, nella quale esse sono trovate allo stesso tempo in più luoghi, precisamente come le violette vengono da ogni parte alla luce in primavera.... ».

Il lavoro di Giovanni Bolyai uscì di fatto come appendice al *Tentamen* del padre nel 1829: « Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem.... ».

E Volfango la comunicò a Gauss nel giugno 1831. Il quale rispose:

« Se comincio col dire che *non posso lodare questo lavoro*, tu certamente per un istante resterai meravigliato; ma non

posso dire altra cosa: lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dell'opera, la via spianata da tuo figlio, i resultati ai quali è stato condotto, coincidono quasi interamente colle meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente da trenta e trentacinque anni a questa parte. Così sono rimasto proprio stupefatto.... Era mia idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perchè almeno non perisse con me. Ed è una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata; anzi sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico, che mi abbia preceduto in modo così notevole ».

Le opere di Lobatschewsky e di Bolyai riflettono naturalmente le diverse mentalità degli autori, e mirano anche, in qualche modo, a scopi diversi: Lobatschewsky alla geometria che sorge dalla negativa del postulato d'Euclide, e Bolyai alla geometria più generale che riesce indipendente da codesto postulato. Ma, infine, le due costruzioni pongono in luce un resultato comune: a prescindere dall'ipotesi euclidea sulla unicità della parallela per un punto ad una retta data, si può costruire un sistema geometrico logicamente coerente, supponendo che per il punto anzidetto passino invece *due parallele* alla retta stessa, cioè due rette non secanti e limiti di rette secanti. Nel sistema così costruito entra un parametro, che può interpretarsi, per esempio, come il rapporto fra l'area di un triangolo e il difetto da due retti della somma dei suoi angoli. Il sistema euclideo appare come limite del sistema non-euclideo, quando il suddetto parametro si faccia tendere a zero (o all'infinito).

Il sistema della geometria generale si traduce nelle formule della trigonometria non-euclidea, e la circostanza che tale sistema di formule sia analiticamente compatibile, significa che il sistema geometrico non-euclideo è parimente compatibile, e quindi il postulato d'Euclide sulle parallele non dipende come conseguenza dai principii (prime proprietà della retta, del piano e della congruenza) su cui Euclide edifica le prime 28 proposizioni dei suoi Elementi; perciò appunto il detto *postulato* resulta, in rapporto a quei principii, *indimostrabile*.

BIBLIOGRAFIA

R. Bonola, *La geometria non-euclidea, esposizione storico-critica del suo sviluppo*. Bologna, 1906.

Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee. Art. 11 in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* raccolte e coordinate da F. Enriques. Bologna, 3ª ed., P. I, vol. II, 1925.

G. Fano, *Geometria non-euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività*. Bologna, 1935.

Una breve esposizione dell'argomento si ha in

F. Enriques, *Conferenze di geometria non-euclidea* redatte da O. Fernandez. Bologna, 1917.

26. - La critica dei principii della geometria nell'indirizzo metrico-differenziale di Riemann

La geometria non-euclidea, divulgata in Europa verso la metà del secolo decimonono, ha suscitato il più forte interesse filosofico, dando la spinta agli sviluppi ulteriori della critica da parte dei pensatori matematici.

Riemann, che domina quest'ordine di ricerche, nella sua tesi di abilitazione « Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen » (1854), affronta il problema più generale di stabilire i postulati della geometria che vengono suggeriti dalle nostre esperienze elementari, quando queste — pure idealizzate come occorre al pensiero matematico — sieno assunte valide soltanto in una regione finita dello spazio, senza estenderle arbitrariamente ed indefinitamente al di là. Egli ammette pertanto che i punti dello spazio sieno suscettibili di una rappresentazione analitica mediante coordinate (coordinate curvilinee qualsiansi), e mette a fondamento di una generale teoria della misura il *teorema di Pitagora generalizzato,* cioè l'espressione quadratica del quadrato dell'elemento lineare, ds^2, per mezzo dei differenziali delle coordinate. La metrica generale così fondata porta a riconoscere, in ogni punto, certe *curvature* dello spazio: nel caso che si abbia una sola *curvatura costante* si ricade (almeno in senso differenziale, cioè per una regione limitata dello spazio) nella *geometria euclidea* o *non-euclidea*:

precisamente il sistema euclideo corrisponde agli spazi di curvatura nulla, il sistema non-euclideo di Lobatschewsky agli spazi di curvatura costante negativa, mentre un nuovo sistema si presenta possibile in corrispondenza agli spazi di curvatura costante positiva: questa ipotesi, che Riemann formula, per la prima volta, come possibile, era stata scartata dai precedenti ricercatori, perchè contraddice alla ipotesi della retta aperta ed infinita di lunghezza; nel *sistema di Riemann* (pure realizzato per lo spazio nella sua integrità) la *retta è linea chiusa,* illimitata ma non infinita.

Agli studi di Riemann si possono riattaccare le belle memorie di Enrico Beltrami, che, anzitutto nel classico « Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea », sviluppa un'idea a dir vero già accennata da Riemann, mostrando che la geometria non-euclidea di Lobatschewsky si lascia interpretare come geometria metrica sopra una superficie a curvatura costante negativa. Più tardi lo stesso Beltrami metteva in luce altri bei teoremi sulle varietà a curvatura costante, per esempio che le geodetiche di esse ammettono una rappresentazione lineare, illustrando così — dal punto di vista della geometria differenziale — le vedute che d'altra parte si andavano maturando sulla fondazione della metrica subordinata alla geometria proiettiva.

Una precisazione di questi studi, con conseguente limitazione dei resultati nel senso della geometria differenziale, è venuta da David Hilbert, il quale ha dimostrato che « non esiste nello spazio ordinario alcuna superficie a curvatura costante negativa, senza singolarità, sopra cui la geometria del piano non-euclideo di Lobatschewsky si realizzi nella sua interezza ».

BIBLIOGRAFIA

F. Enriques, *Prinzipien der Geometrie*, in « Enc. der Math. Wiss. », III A B 1, 1907, redazione francese in *Edition française*, Parigi, 1911.

27. - Le metrico-proiettive di Cayley-Klein

L'idea di definire la metrica come subordinata al sistema della geometria proiettiva, si è presentata — come accennammo — nella scuola francese di Poncelet e può dirsi realizzata coll'osservazione di Laguerre che l'angolo di due rette si esprime come logaritmo del birapporto che esse formano coi raggi proiettanti i due punti ciclici del piano (1853).

Questa osservazione concerne il caso euclideo. Ma presto A. Cayley (1859) ha fatto vedere che la metrica proiettiva euclidea si può generalizzare in un sistema metrico-proiettivo rispetto ad una *conica* (assoluto) o ad una quadrica nello spazio; la distanza di due punti si esprime qui come logaritmo del birapporto formato da essi e dalle intersezioni della loro congiungente colla conica-assoluto: la metrica ordinaria di Poncelet-Laguerre appare caso limite di questa metrica convenzionale, quando la conica-assoluto degeneri, come inviluppo, in due fasci immaginari. La metrica di Cayley aveva, nella mente dell'autore, un significato puramente formale ed algebrico; ma dai lavori di E. Beltrami (1868) e di F. Klein (1872) è apparso che essa contiene precisamente i diversi casi cui dan luogo le ipotesi non-euclidee (geometria di Lobatschewsky e di Riemann), e il caso limite euclideo.

Quest'osservazione suscita il problema se la geometria proiettiva possa fondarsi indipendentemente dal postulato delle parallele. Il Klein dà alla domanda una risposta affermativa, notando anzitutto che, se lo spazio è ellittico (sistema di Riemann), lo stesso spazio metrico coincide collo spazio proiettivo, mentre nel caso iperbolico (di Lobatschewsky) bisogna introdurre dei *punti ideali,* concepiti come centri di fasci o di stelle di rette, perpendicolari ad una retta o ad un piano: allora la regione dei punti propri dello spazio metrico è separata dalla regione dei punti ideali mediante una quadrica-limite (luogo dei punti, all'infinito, che sono comuni alle rette parallele) e la metrica si lascia definire in

rapporto a codesta quadrica, presa come assoluto nel senso di Cayley.

I resultati così conseguiti hanno dato interesse alla critica dei principii della geometria proiettiva ond'è uscita, come già dicemmo, la sistemazione logica di questa disciplina. Ma la spinta si è proseguita al di là di tale scopo.

Come si era riusciti a provare l'indipendenza del postulato delle parallele dai postulati di appartenenza e di congruenza, e a costruire così una geometria più generale (non-euclidea), si è proceduto a dissecare altri principii fondamentali della geometria: in particolare il postulato della *continuità* nei suoi rapporti col cosidetto *postulato d'Archimede*. GIUSEPPE VERONESE (1891) ha dimostrato, per la prima volta, la possibilità logica di una geometria non-archimedea.

Il concetto di questa geometria non-archimedea è stato poi ripreso e sviluppato da DAVID HILBERT, nelle sue classiche ricerche (1899), dalle quali restano profondamente lumeggiati i rapporti logici di tutte le proposizioni fondamentali della geometria proiettiva. E i discepoli del grande geometra (in ispecie MAX DEHN) hanno proceduto più innanzi in tale ordine di idee.

BIBLIOGRAFIA

F. ENRIQUES, *Prinzipien der Geometrie*, in « Encyclopaedie der math. Wissenschaften », III, A, B, 1. Idem ed. francese.

D. HILBERT. *Grundlagen der Geometrie*. 3ª ed. Lipsia e Berlino, 1909.

F. KLEIN, *Nicht Enklidische Geometrie*. Gottinga, 1893.

28. - IL PROBLEMA DELLO SPAZIO

Abbiamo già accennato che colla geometria non-euclidea si affaccia, nella mente di Lobatschewsky, la veduta che lo spazio non sia forma a priori imposta dalla mente all'esperienza esterna (così come KANT ammetteva) bensì costruzione riflettente una realtà sperimentale, che — in ultima analisi — deve essere giudicata dall'esperienza. La stessa veduta si era presentata a GAUSS (che aveva sottoposto ad accurata valutazione le misure di un triangolo geodetico) ed a SCHWEI-

KART, che — comunicando a Gauss le sue idee in proposito — aveva dato alla concepita geometria il nome di *astrale*.

Ora la costruzione della geometria non-euclidea ha posto, per lungo tempo, gli uni di fronte agli altri, matematici e filosofi di professione. Ancora verso la fine del secolo scorso si possono scorgere queste posizioni contrapposte:

Tesi dei matematici. - Lo sviluppo della geometria non-euclidea prova che il postulato delle parallele non risponde ad una necessità logica, dunque il valore di questo principio non può essere dato che dall'esperienza;

Tesi dei filosofi neo-kantiani. - Uno sviluppo tecnico-matematico non può risolvere una questione filosofica e gnoseologica; secondo la tesi di Kant gli assiomi (o postulati) della geometria sono bensì *a priori*, ma posseggono una necessità gnoseologica e non logica (come giudizii *sintetici* e non *analitici*); poichè esprimono le condizioni intuitive necessarie per l'interpretazione di ogni esperienza possibile.

A dir vero i contrastanti fanno qui la figura dei ciechi che si prendono a bastonate. I matematici — non curanti di comprendere il vero senso della tesi kantiana — male giustificano le ragioni del loro empirismo. Gli avversarii, più pronti a cogliere codesta manchevolezza formale che a cercare da loro stessi il significato filosofico della costruzione non-euclidea, scambiano colla verità il facile successo dialettico.

Ma dal seno delle matematiche sono sorti pensatori, più degni del nome di filosofi, per mettere la questione nei suoi veri termini. Con RIEMANN, HELMHOLTZ e CLIFFORD, la cosa si può dire virtualmente giudicata. La *geometria non-euclidea* a stretto rigore non proverà la concezione empiristica, ma *rovina* intanto *la tesi di Kant*. Perchè? Perchè essa ci mette innanzi la possibilità di interpretare l'esperienza in ordine alla supposizione di uno spazio dotato di curvatura costante k, poco diversa da zero, per modo che tutte le nostre esperienze, condotte in un certo ordine di approssimazione, restino valide essendo k abbastanza piccolo. Come si vede, il nocciolo dell'argomento sta nella scoperta del parametro (curvatura) da cui dipendono gli spazi non-euclidei,

e dalla possibilità di ritenere lo spazio euclideo come limite di questi per $k=0$.

Il ragionamento è stato illustrato nel modo più chiaro colla finzione degli *animaletti superficiali* che si muovono sopra una superficie di curvatura costante. Per essi, se la curvatura è abbastanza piccola, la superficie non differisce dal piano tangente, e pertanto è naturale che essi interpretino le loro esperienze come se vivessero in un ambiente (superficiale) euclideo (curvatura nulla). Nasca ora, fra i predetti animaletti, un Kant, o — ciò che costa meno — un filosofo neo-kantiano, e questi teorizzerà le condizioni della propria esperienza assumendone come presupposto necessario l'intuizione euclidea; anzi vedrà in questa la condizione di ogni esperienza possibile. Tale filosofia avrà probabilità di durare nel mondo dei nostri animaletti, finchè non si riesca ad allargare l'esperienza di tanto da mettere in luce la curvatura dell'ambiente!

Rovinata così la tesi kantiana, nei propri termini in cui essa è formulata, le tendenze o esigenze mentali che alla sua ora essa è venuta ad esprimere, possono naturalmente rinascere in altre forme.

Se si vede lo spirito della dottrina di Kant in una *gerarchia naturale delle conoscenze,* per cui la fisica riesce subordinata alla geometria, che rispetto ad essa figura come presupposto, si può dire che un neo-kantiano più vero e maggiore è sorto dal terreno stesso delle matematiche, nella persona di Henry Poincaré. Il quale, rilevando le premesse (sulla trasmissione della luce, ecc.) che soggiacciono alla definizione fisica della retta, ha scorto nei principii della geometria non già ipotesi da mettere alla pari coi principii della fisica, che l'esperienza controlla, ma *convenzioni* da non revocarsi in dubbio, di cui può discutersi soltanto la comodità (1903-5). Alla sua volta questo convenzionalismo, che si accompagna ad un profondo movimento del pensiero pragmatistico contemporaneo (e in particolare della filosofia francese) è stato combattuto da Enriques (1906). Il dibattito mette in luce il vero significato del problema dello spazio: la geometria presa di per sè è un'astrazione; in concreto

essa si prolunga nella fisica. E così la scelta di un sistema di ipotesi geometriche non ha un senso assoluto indipendente dall'insieme delle altre ipotesi fisiche che con esso si assumono.

Questa veduta concreta del problema si è tradotta in un grandioso progresso della scienza colla costruzione della teoria generale della relatività di ALBERTO EINSTEIN (1914-17).

Anche qui i filosofi di professione sembra che poco abbiano capito il vero senso filosofico della rivoluzione compiuta. È meraviglioso vedere tanti indugiarsi sui particolari tecnici, affrontando perfino la fatica di apprendere gli algoritmi del calcolo differenziale assoluto, anzichè penetrare l'idea elementare che sta a base di tali sviluppi. Eppure — studiando meglio le cose più elementari, che sono le più ricche d'insegnamento per le menti filosofiche capaci di meditarle — avrebbero ben potuto comprendere lo spirito della dottrina scientifica: la quale non crea una nuova filosofia, ma esemplifica e avvalora e fa fruttificare i principii di quella filosofia, germogliata dalla critica non-euclidea, che i predetti filosofi non avevano preso in considerazione!

Gli sviluppi ulteriori costituiscono ancora un progresso sulla stessa via. Il tentativo di estendere l'unificazione dei fenomeni fisici con una teoria che abbracci insieme gravitazione ed elettro-magnetismo ha dato luogo a concezioni sempre più larghe dello spazio, quali maturano negli studi di H. WEYL e di E. CARTAN. Intorno a queste ricerche si troveranno notizie e indicazioni bibliografiche nell'articolo di G. FANO su la « Geometria », nell'Enciclopedia Italiana.

BIBLIOGRAFIA

Sul problema dello spazio:

F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*. Bologna, 1906, 3ª ed., 1925; Trad. ted. e ingl. Trad. franc. in due volumi, *Les problèmes de la science et la logique*, Parigi, Alcan, 1909, e *Les concepts fondamentaux de la science*, Flammarion, Parigi.

Spazio e tempo davanti alla critica moderna, in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. II. Bologna, 1925.

La géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance, nel volume *In memoriam N. Lobatschewsky*. Kazan, 1927.

La théorie de la connaissance scientifique. Parigi, Hermann, 1938.
G. CASTELNUOVO, *Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein*. Bologna, Zanichelli, 1923.

Sui più recenti sviluppi del concetto di spazio di Weil e Cartan (in relazione al parallelismo di Levi-Civita) cfr. anche:

E. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace*. « Bullettin des Sciences Mathématiques », 1924 ; *La théorie des groupes et les recherches récentes de Géométrie differentielle*. « Enseignement Mathématique », 1924-25 ; nonchè i trattati pubblicati dallo stesso A. presso Gauthier et Villars a Parigi, nel 1928 e nel 1937.

Capitolo IV.

LETTERATURA MATEMATICA

29. Enciclopedie e rapporti

Nel cap. IV del Libro primo e nelle bibliografie dei diversi §§ del Libro terzo, abbiamo dato al lettore un'informazione sui trattati, generali o speciali, attinenti ai varii rami delle matematiche, e sulle opere dei classici, di cui viene raccomandata la lettura. Lo studioso di una qualunque teoria troverà nei trattati una visione più larga dei problemi che lo sollecitano e un orientamento sui metodi di ricerca che per essi occorrono; ma ciò non lo dispenserà dal ricercare notizie sulla più completa letteratura del soggetto, rendendosi conto in ispecie della relativa novità delle proprie considerazioni. A tal uopo, e per quel che concerne l'informazione su lavori non troppo recenti, soccorrono i rapporti della:

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Lipsia dal 1898 ad oggi).

di cui soltanto una parte trovasi tradotta — con modificazioni ed aggiunte — in una edizione francese, che è stata interrotta dalla guerra.

In Francia si è iniziato quindi il:

Mémorial des Sciences mathématiques (oltre 80 fascicoli dal 1925)

serie di monografie che non pretende di avere un carattere sistematico.

Assai utile, pur nella sua forma ristretta, è anche il:

Repertorio di Matematiche superiori di E. Pascal (Milano 1898-900), ripreso e rinnovato in tedesco da P. Epstein

e H. E. TIMERDING col concorso di varii collaboratori, sotto il titolo:

Pascal's Repertorium der höheren Mathematik, Lipsia 1910 e seg.

Rapporti speciali, spesso assai larghi e profondi, si trovano, per esempio, nei volumi della *Deutsche mathematische Vereinigung* e in raccolte, (promosse da Società scientifiche o in occasione di *Congressi,* ecc.) che talvolta si è avuto a citare nel corso di questo libro.

I contributi originali dei matematici vengono esposti di solito, per così dire giorno per giorno, negli atti delle Accademie scientifiche, e nei volumi dei giornali o riviste all'uopo dedicate. Soltanto qualcuno dei matematici più maturi riserva a più ampi volumi o trattati anche i frutti della propria ricerca.

Per informarsi del movimento, in ogni ordine di questioni, il matematico dispone oggi di alcuni organi speciali:

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlino, 1868 e seg.

Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdam, 1893 e seg. (fusa col *Jahrbuch* dal 1931).

Centralblatt für Mathematik, Berlino, 1931.

Per le indicazioni bibliografiche cfr.:

J. C. Poggendorf's biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Lipsia, Berlino, 1863-1925.

Sugli sviluppi delle matematiche contemporanee nei varii paesi, vedansi:

Per l'Italia:

F. ENRIQUES - *Gli studi matematici* (Arti e studi in Italia nell'ultimo venticinquennio), Leonardo VI, 5, 1928.

Per la Francia:

P. SERGESCU - *Les Sciences mathématiques* (Extrait du Tableau du XX siècle), Parigi, 1933).

Per il mondo anglo-sassone:

A. MACFARLANE - *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century,* New York, 1916.

Per la Germania sono contenute molte notizie nella più larga opera, già citata di

F. KLEIN - *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert,* Berlino, 1926-27.

Una bibliografia delle opere matematiche apparse nel secolo XIX è offerta da:

E. WÖLFFING - *Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des* 19. *Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.* Lipsia (in *Abhandlungen zur Geschichte d. Math. Wiss.* XVI).

30. LE ACCADEMIE

Le accademie scientifiche, che riprendono il nome dell'Accademia platonica e delle Congreghe o società filosofiche e letterarie del Rinascimento italiano, traggono origine dagli spiriti di quest'epoca straordinaria e dagli impulsi alla ricerca matematica e naturalistica che caratterizzano il pensiero del secolo XVII. I principii di tali istituti si legano in generale ai grandi nomi dei filosofi e dei fondatori della nuova scienza, ed esprimono talora una opposizione di tendenze agli ambienti scolastici delle Università. GALILEO figura fra i soci dell'*Accademia dei Lincei* (1603-1630), fondata a Roma da FEDERICO CESI. E — per iniziativa di VIVIANI e TORRICELLI — i suoi discepoli si affratellano, più tardi a Firenze, nel lavoro dell'*Accademia del Cimento* (1657-1666), che offre il più splendido esempio di collaborazione scientifica.

In un ambiente più individualistico, l'esempio degli scienziati del Cimento è stato imitato in Inghilterra [1], dove alcuni amici di FRANCESCO BACONE (Wallis, Wilkins, ecc.) avevano cominciato a riunirsi settimanalmente a Londra, fin

---

[1] I *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* (pubblicati a Firenze nel 1667) sono usciti nella traduzione inglese di R. Waller il 1684.

dal 1645. Da queste riunioni private è sorta la *Royal Society* di Londra (1662), di cui ROBERTO HOOKE è stato il primo presidente, e che fu poi presieduta da NEWTON, ecc.

In connessione col Cimento e colla Società Reale inglese si trova anche, fin dalle origini, l'*Académie des Sciences* di Parigi, fondata da Colbert ministro di Luigi XIV nel 1666; alla quale precedono del pari riunioni e discussioni private di uomini come ROBERVAL, DESCARTES, PASCAL e GASSENDI, presso il P. MERSENNE e presso altri.

Sulla fondazione dell'Accademia delle scienze di *Berlino* (1700) influì particolarmente il LEIBNIZ, grande propugnatore della cooperazione scientifica internazionale. Egli stesso fu il primo presidente dell'istituto, di cui più tardi furono chiamati a dirigere i lavori EULERO e LAGRANGE. Come imitazione del detto istituto sorse poi l'Accademia di *Pietroburgo* (1724). A *Madrid*, a quanto pare sull'esempio delle prime società napoletane, si era costituita una *Accademia naturae curiosorum* nel 1557, e sotto lo stesso nome era sorta a Halle, nel 1662, quella Società che è divenuta più tardi l'Accademia *Leopoldina-Carolina*, la più antica della Germania.

Le accademie scientifiche si sono quindi moltiplicate, nei secoli successivi, fino ai nostri giorni; in tutti i paesi colti si vedono sorgere, come nuove creazioni, ispirandosi spesso al modello dell'Istituto di Francia, ovvero riattaccandosi alla tradizione di enti che avevano cessato d'esistere. Veramente col loro carattere ufficiale, col concetto di una distinzione onorifica dei meriti dei Soci, si perde in gran parte il significato primitivo della Società che compie un lavoro scientifico collettivo; le Accademie diventano quindi organi rappresentativi delle culture nazionali. Sorgono: l'Accademia irlandese di Dublino nel 1731 e la Philosophical Society divenuta poi la Royal Society di Edimburgo, nel 1741; l'Accademia di Stoccolma nel 1739, la danese nel 1743, quella di Gottinga nel 1751, di Monaco nel 1759, del Belgio nel 1772, di Lisbona nel 1779. La prima accademia americana — la *American Philosophical Society* — si costituisce a Filadelfia per opera di BENIAMINO FRANKLIN nel 1743; più tardi la *American Academy of Arts and Sciences* viene creata a Boston

nel 1780 (la *National Academy* di Washington sorge soltanto nel 1863).

Molte nuove accademie doveva vedere il secolo XIX: Budapest 1825, Lipsia 1846, Vienna e Madrid 1847, Amsterdam 1855, Christiania 1857, Zagabria 1861, Bucarest 1866, Sofia 1869, Belgrado 1886; la prima accademia polacca nasce a Cracovia nel 1872 (quella di Varsavia è del 1907). Il movimento si diffonde anche fuori dei paesi di cultura europea: a Costantinopoli si ha un'accademia delle scienze fino dal 1851, a Tokio l'accademia imperiale del Giappone nel 1879.

Tutte queste accademie — e non pretendiamo di averne dato un elenco comunque completo — sono generalmente ordinate secondo il criterio aristocratico di una rigida cooptazione, e adempiono ad una funzione conservativa della cultura. In origine esse raccolgono in speciali pubblicazioni i lavori dei loro soci (come, p. es., la prima accademia francese nei « Volumes de l'Académie Royale des Sciences de Paris »), più tardi pubblicano diverse collezioni di volumi; così l'Accademia dell'Istituto di Francia (riordinato dalla Rivoluzione e poi da Napoleone) ha, durante il secolo XIX, due serie di *Mémoires,* l'una per i soci che s'inizia del 1816 e l'altra per i « savants étrangers », che va dal 1827 al 1908, e si è fusa poi colla prima; e d'altra parte raccoglie e divulga nella maniera più rapida le comunicazioni che vengono fatte nelle sue sedute, coi « *Comptes rendus* » iniziati nel 1835. Anche la Società Reale di Londra pubblica, accanto alle « *Transactions* » i « *Proceedings* »; e la stessa distinzione, fra « *Memorie* » e « *Atti* » o « *Resoconti* », si ritrova generalmente diffusa anche nelle altre accademie; qualcuna anzi, come quella di Vienna, distingue ulteriormente fra « Atti » (Anzeiger) e « Resoconti » (Sitzungsberichte).

In Italia si pubblicano comunemente *Note* di Matematiche (che d'altronde non son ridotte al semplice enunciato dei resultati conseguiti, come nei « Comptes rendus ») dalla *R. Accademia Nazionale dei Lincei* e dalle accademie di *Torino, Napoli, Bologna* e *Palermo,* dall'*Istituto Lombardo,* dall'*Istituto Veneto,* dall'*Accademia Pontificia,* ecc. e si trovano più lunghe *memorie* in speciali volumi delle anzidette

Società, ed anche della *Società Italiana delle Scienze detta dei XV*, e — dopo il 1929 — della *R. Accademia d'Italia* [1].

Conviene aggiungere che di fronte alle accademie scientifiche propriamente dette, ordinate secondo il criterio aristocratico di una ristretta scelta dei Soci e portanti, in qualche modo, il suggello dell'autorità dello Stato a cui appartengono, si formano anche società più libere, aperte a tutti gli studiosi, che spesso promuovono riunioni o congressi e soccorrono alla pubblicazione di giornali o riviste, aiutando l'iniziativa privata. Società specialmente dedicate alle matematiche sono sorte: a Londra nel 1865, in Francia, 1872; a Edimburgo, 1883; il Circolo matematico di Palermo nel 1884; la American mathematical Society nel 1888; la Deutsche mathematische Vereinigung nel 1890; la Società matematica spagnuola il 1911; l'Unione matematica Italiana nel 1922, ecc.

Accenniamo più avanti alle riviste più diffuse che esse pubblicano. Qui vogliamo notare che di recente la pubblicazione di riviste viene assunta anche da istituti d'insegnamento, seminari ecc., che così raccolgono e divulgano le conferenze o i lavori cui hanno dato occasione. Citiamo fra tali enti: l'istituto « Henry Poincaré » di Parigi, il Seminario matematico di Edimburgo, che ha avuto un bel periodo di attività col WHITTAKER, quello di Amburgo, animato oggi dal BLASCHKE, ecc. In Italia prosperano e pubblicano importanti riviste i seminarii delle Università di Roma, Torino, Milano, Bologna, Padova, ecc.

31. LE PRINCIPALI RIVISTE MATEMATICHE DEL MONDO

I primi giornali che pubblicano articoli di matematiche, dopo il 1665, sono le *Philosophical Transactions* e il *Journal*

---

[1] Cfr. MAYLÄNDER, *Storia delle Accademie d'Italia*. Bologna, 1926 e seg.

Notizie generali sulle accademie del mondo trovansi nei volumi della « Minerva ».

des Sçavants, organi rispettivamente della Società Reale di Londra e dei circoli scientifici di Parigi. Ma nel secolo XIX le pubblicazioni dedicate alle matematiche (e alle loro applicazioni) si moltiplicano e si specializzano, presentando un fenomeno caratteristico della cultura che è strettamente legato col progresso della scienza in quel periodo storico.

Già alla fine del secolo XVIII nasce in Francia il *Journal de l'Ecol polytechnique,* 1794, che in due serie successive comprende fino ad oggi $63+35=98$ volumi. Esso è l'organo di quella celebre Scuola politecnica che, sotto l'influenza di MONGE, si è costituita nelle ore tragiche della Rivoluzione, per rispondere alle esigenze tecniche e militari dello Stato. Ed è pieno d'insegnamento il fatto che in tale istituto abbia avuto e continui ad aver posto un così alto e severo studio dei rami più difficili delle matematiche pure, che si vedono troppo spesso abbassate e tenute in poco conto nelle nostre scuole d'Applicazione.

Il citato *Journal,* che accoglie fin dagli inizi memorie dei grandi matematici dell'epoca, non è propriamente, nelle sue origini, una pubblicazione esclusivamente matematica. La prima rivista di matematiche pure (ad onta del suo titolo) sorge invece cogli

Annales de Mathématiques pures et appliquées di J. D. GERGONNE (Nîmes, 21 voll. dal 1810 al 1831).

In questi volumi si sente, non solo il soffio della nuova geometria, sì anche l'anima filosofica del suo direttore, che è insieme matematico, logico e storico della scienza. La pubblicazione ha avuto un seguito coi *Nouvelles Annales de Mathématiques* iniziati da TERQUEM e GERONO nel 1842 e continuati fino al 1927, i quali costituiscono in qualche modo una rivista didattica, che esprime lo spirito della geometria proiettiva secondo la tradizione francese (ove è caratteristico l'interesse per le questioni metriche, trattate per esempio da Laguerre intorno al 1870).

Non sappiamo se l'esempio del *Journal de l'Ecole polytechnique* abbia esercitato qualche influenza sulla pubblicazione del *Philosophical Magazine,* Londra 1798; ma certo esso, e anche più direttamente gli *Annali* di Gergonne, hanno in-

fluito sui circoli della cultura tedesca e sulla fondazione della prima rivista di matematiche in questo paese: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* di A. L. CRELLE (1826), che ha accolto subito i primi lavori di Abel e di Jacobi. Crelle non era un matematico produttivo nel più alto senso della parola, ma ha giovato assai al progresso e alla propagazione delle matematiche col suo spirito intraprendente, cui soccorreva una buona conoscenza dei giovani. Il suo giornale è stato proseguito da C. W. BORCHARDT a datare dal 1857, e così ha continuato ad essere particolarmente l'organo della scuola di Berlino; nel 1881 ne assumevano la direzione KRONECKER e WEIERSTRASS. In tutto si sono pubblicati 175 volumi fino al 1936.

Frattanto un'altra celebre rivista sorgeva in Francia, nella prima metà del secolo XIX: il *Journal de Mathématiques pures et appliquées* di J. LIOUVILLE, fondato nel 1836, che, in diverse serie successive, si è pubblicato, senza interruzione, fino ad oggi; l'ultima serie, di 15 volumi, comincia nel 1922.

Nella seconda metà del secolo scorso le riviste di matematiche si moltiplicano in tutti i paesi. Riservandoci di dare, più innanzi, qualche notizia più precisa sulle riviste italiane, citiamo qui alcune fra le riviste celebri e di più lunga vita, che appartengono ai diversi paesi stranieri.

In Francia:

Annales scientifiques de l'École normale, fondati con carattere scientifico generale da L. PASTEUR nel 1864, che si svolgono poi in oltre 70 volumi per tre serie successive, colla direzione di HERMITE nel 1889, di DARBOUX nel 1901, ecc.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques redatto inizialmente da DARBOUX, oggi da PICARD (oltre 138 voll. in due serie). Questo bollettino, che conteneva in origine « comptes rendus et analyses », ha aggiunto una rubrica di « Mélanges » ove si pubblicano articoli originali:

In Germania i

Mathematische Annalen, fondati nel 1870, sono divenuti, per opera di C. NEUMANN, e poi specialmente di F. KLEIN,

l'organo più importante delle matematiche tedesche (112 voll. fino al 1936).

A Vienna i

Monatshefte für Mathematik, 1890.

In Inghilterra i

Proceedings of the London Mathematical Society (dal 1865) accolgono lavori di Fisico-matematica e di matematica pura, di Larmor, Baker, Lowe, ecc. Ad essi si aggiunge, dal 1926, il

Journal of the London Mathematical Society, ove trovano posto più brevi comunicazioni.

Quarterly Journal of Mathematics, si pubblica ad Oxford dal 1930.

In America la prima rivista di matematiche è lo *American Journal of Mathematics pure and applied* fondato da J. J. SYLVESTER nel 1878 (58 voll. fino ad oggi).

Ricordiamo altresì il

Bulletin of the New-York Mathematical Society dal 1891.

Transactions of the American Mathematical Society dal 1900.

Annals of Mathematics organo della Harvard University dal 1900.

In Russia il

Récueil mathématique de Moscou, dal 1866.

Carattere internazionale più eminente hanno gli *Acta Mathematica* fondati a Stoccolma da G. MITTAG-LEFFLER, nel 1882 (67 voll. fino al 1936).

Non è possibile seguire lo sviluppo delle riviste matematiche che procede, con moto accelerato, in tutti i paesi del mondo, in correlazione al propagarsi della scienza e della cultura e al simultaneo affermarsi delle differenze nazionali. Basti dire che il secolo XX vede sorgere pubblicazioni di questo genere nei paesi tedeschi, a Groninga, a Kopenhagen, a Lund, a Varsavia, a Bucarest, ecc. Qualcuna di tali riviste si specializza limitandosi ad un ramo particolare delle scienze matematiche; così in Polonia i *Fundamenta Mathematica*

costituiscono, dal 1923, un organo specialmente dedicato alla teoria degli insiemi, mentre gli *Studia mathematica* si dedicano ai funzionali. Sorgono riviste di matematiche anche nei paesi di più recente cultura: in Turchia, in Giappone, in Cina, ecc.

Nell'America del Sud vi sono tre riviste principali:

Rivista matematica hispano-americana, organo della scuola argentina (dal 1926).

Revista de Ciencias a Lima dal 1897.

Jornal de Matematica pura e aplicada, fondato nel 1937 a S. Paolo del Brasile, da un gruppo di professori italiani che sono stati chiamati a rinnovare quell'Università.

Riviste Italiane.

Abbiamo lasciato per ultimo le riviste matematiche italiane, intorno a cui vogliamo dare qualche notizia più precisa. La più antica è costituita da:

Il nuovo Cimento, rivista di fisica e matematica fondata da Piria e Matteucci a Pisa, nel 1844, che continua ancora, pubblicando articoli di fisica sperimentale e di fisica matematica. Carattere più matematico hanno gli:

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini dal 1850 al 1857, che diventano, nel 1858 gli:

Annali di Matematica pura e applicata, pubblicati ancora dal Tortolini col concorso dei matematici più eminenti: Betti, Brioschi e Casorati. La 1ª serie di questi *Annali* va fino al 1867; la 2ª viene diretta da Brioschi e Cremona e poi più specialmente dal primo. Una 3ª serie s'inizia, dopo la morte del Brioschi nel 1898; la 4ª, che attualmente si prosegue, dal 1922.

Accanto agli anzidetti *Annali* si hanno:

Il *Giornale di Matematiche* ad uso degli studenti delle Università Italiane, fondato a Napoli nel 1863 da G. Battaglini col concorso di altri colleghi, di cui si sono pubblicati fino ad oggi oltre 70 volumi.

I *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* iniziati nel 1888, cui il suo fondatore G. B. Guccia è riuscito a dare per un trentennio vasta risonanza internazionale.

Gli *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa,* costituiscono, in una delle sue parti, una rivista per le scienze fisiche e matematiche. La prima serie comprende 14 volumi (1871-1922). Una seconda serie si apre nel 1932, e ad essa dà subito florida vita L. TONELLI.

Il *Bollettino dell'Unione matematica italiana,* s'inizia a Bologna nel 1922, con S. PINCHERLE.

Il *Periodico di Matematica* per l'insegnamento secondario, fondato nel 1886 da D. BESSO e curato poi da A. LUGLI e da G. LAZZERI fino al 1918, è stato rinnovato nel 1921, come:

Periodico di Matematiche (storia, didattica, filosofia) IV serie, e — per iniziativa di F. ENRIQUES e dei suoi collaboratori — ha sviluppato un programma di accostamento delle matematiche elementari alle matematiche superiori, e di chiarimento e divulgazione delle idee e delle dottrine. Esso presenta così un carattere speciale anche di fronte alle più reputate riviste congeneri che si pubblicano all'Estero, quali sono per es.:

L'Enseignement Mathématique, fondato a Ginevra nel 1899 da C. A. LAISANT e H. FEHR, e

The Americano Mathematical Monthly iniziato nel 1894.

INDICI

INDICE DEI NOMI

Abel N. E. 67, 152, 197, 200, 201, 202, 207, 208, 209, 210, 211, 215, 216, 217, 219, 221, 222, 237, 252, 316
Abraham bar Chija v. Savasorda
Abùl Wafa 26
Adam C. 78
Adriano Romano (van Roomen) 39
Agostini A. 78.
Agostino (S.) 19, 121, 131
Ahrens W. 192
Alberti Leon Battista 30, 186
Alcuino 21
Alexander 225
Alhazen 30
Alighieri Dante 157
Allman G. J. 70
Amaldi U. 187, 254, 295
Ampère A. M. 176
Anarizio (An-Nairizi) 16, 74
Anassimandro 9, 119, 128
Anderson 48.
Anselmo d'Aosta 127, 131
Apollonio 16, 25, 27, 30, 44, 55, 59, 76, 273
Arago J. F. D. 218, 219
Archibald (R. C.) 75
Archimede 8, 16, 17, 18, 25, 27, 45, 46, 47, 51, 63, 75, 76, 110, 152, 175, 190
Archita di Taranto 170
Argand J. R. 38, 210
Aristotele 87, 121. 125, 127, 128. 135, 139, 164, 169, 170
Aronhold 280
Aryabatta 23
Arzelà C. 67, 84, 237, 248
Ascoli Giulio 237, 247
Autolico da Pitane 77

Bacone R. 311
Baer R. 80
Baker H. F. 215, 294, 317
Baltzer R. 280
Barbensi G. 103, 104
Barrow I. 59, 78
Bartels 298
Basso S. 88
Battaglini G. 83, 318
Beda (il Venerabile) 21
Bellacchi G. 215
Beltrami E. 253, 302, 303
Benedetti G 56
Benini R. 107
Benoist A. 81
Berkeley 132
Bernoulli Daniele 90, 91, 95, 196, 239
Bernoulli Giacomo 66, 94, 246
Bernoulli Giovanni 60, 66, 208, 238, 246
Bertini E. 284, 286, 287, 292

Bertrand J. 82, 219, 262, 277
Berzelius J. J. 92
Berzolari L. 295
Besso D. 319
Betti E. 187, 203, 204, 207, 222. 224, 225, 226, 318
Bézout E. 79
Bhaskara Carya 24
Bianchi L. 80, 81, 84, 215, 224, 233
Bieberbach L. 84, 214
Birkhoff G. 192
Bjerknes C. A. 197, 209, 219
Björnbo A. A. 77
Black J. 91
Blaschke 314
Blichfeldt H. F. 80
Bobillier 278
Boezio Severino 20, 77
Bohr N. 102
Boldrini M. 104
Boltzmann L. 96
Bolyai W. 134, 156. 297, 299, 300
Bolzano B. 67, 132, 140, 242, 245
Bombelli R. 37, 38, 40, 42, 78, 190, 209
Bompiani E. 263, 266
Boncompagni B. 72, 78
Bonola R. 301
Boole G. 280
Borchardt C. W. 316
Borel E. 80, 84, 97, 99, 241, 244
Borelli G. A. 75, 103
Bortolotti E. 34, 35, 52, 72, 78, 207
Boscovich R. 90
Bossut C. 69
Bouquet J. C. 81
Boussinesq J. 83
Boutroux P. 191, 227
Boyle R. 90, 92
Bradwardino T. 29, 30
Brahmagupta 24
Bréton Ph. 96
Bretschneider C. A. 70
Brianchon Ch. J. 266
Briggs H. 48
Brill A. 286, 295
Brioschi F. 79, 187, 280, 282, 318
Briot C. 81
Brisson 211
Brunelleschi F. 30
Brunschwicg L. 191
Bubnow 77
Buffon G. L. (Léclerc conte di) 164
Bürgis J. 40, 43
Burnside W. S. 79, 80

Campano G. 16, 29, 75
Campedelli L. v. Enriques
Candalla (Fr. de Foix conte de Candale) 16
Cannizzaro S. 92
Cantor G. 67, 83, 132, 243, 244
Cantor M. 70, 71, 72
Capelli A. 80
Caporali E. 284
Caratheodory C. 83
Cardano G. 34, 35, 37, 78, 94, 209
Carli F. 118
Carlyle T. 172
Carnot L. 67, 170, 232, 235, 236, 259, 261, 271, 296
Carnot Sadi 112
Carruccio E. 60
Cartan E. 307, 308
Casorati F. 215, 226, 282, 283, 318
Cassiodoro 20, 21
Castelli Benedetto 48
Castelnuovo G. 54, 72, 79, 81, 94, 287, 292, 293, 295, 308
Cataldi P. A. 16, 48, 75
Cauchy A. L. 67, 79, 82, 83, 174, 180, 202, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 224,

236, 237, 242, 245, 262, 265, 289, 296
Cavalieri B. 27, 48, 49, 50, 51, 52, 55, 78, 152
Cayley A. 280, 281, 288, 303, 304
Cech E. 234
Cesaro E. 80, 84
Cesi F. 311
Chasles M. 75, 81, 152, 258, 263, 265, 268, 269, 270, 276, 277, 278, 282
Chemin 81
Chevalier 203
Chisini O. 81
Chuquet N. 29, 40, 78
Cicerone 181
Cipolla M. 80
Clairaut A. 66, 186, 190
Clausius R. J. E. 96
Clavio Ch. 16, 75
Clebsch R. F. 81, 226, 227, 280, 283, 284, 285, 286
Clifford W. K. 288, 305
Cohn Jonas 130, 245
Colbert J. B. 312
Colding L. A. 91
Colla (De Tonini De Coi Zuannin detto il) 33, 34
Combes 115
Comessatti A. 81
Commandino F. 31, 47, 75, 76
Comte A. 91, 133, 167
Conforto F. v. Enriques
Conti A. 199
Copernico N. 31
Cossali P. 72
Côtes R. 196
Courant R. 84
Cournot A. 107, 163, 167
Couturat L. 78, 245
Cramer G. 79, 81, 278, 280
Crelle A. 216, 273, 316
Cremona L. 81, 111, 180, 187, 269, 274, 276, 278, 281, 282, 283, 284, 286, 318
Culmann K. 111
Curtze M. 77, 78
Czwalina A. 76

D'Alembert J. 40, 66, 90, 113, 235, 239, 261, 296
Dalton J. 92
D'Ancona 105
Dandelin 269
Darboux G. 67, 227, 233, 247, 255, 270, 277, 316
D'Arcy Thompson W. 104, 105
Darwin C. 104, 166, 172
Datta B. 23
Daudet A. 269
Davemport C. P. 104
De Beaume 64
Dedekind R. 15, 67, 190, 238
De Gua J. P. 81, 278
Dehn M. 304
De Jonquières E. 269, 282
De la Hire Ph. 258, 266
De La Vallée Poussin 83
Del Ferro S. 34, 35, 39
Del Fiore A. M. 34
De l' Hôpital (marchese) 66, 82
Della Nave A. 35
De Méré 94
De Michelis E. 192
Democrito 8, 12, 87, 119, 120, 123, 129, 164, 181
De Moivre 38, 210
De Morgan A. 296
De Paolis R. 276, 277, 284, 287
Desargues G. 43, 44, 255, 257, 258, 264, 273
Descartes R. 29, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 57, 64, 70, 78, 80, 88, 122, 128, 140, 149, 238, 312

De Tonini De Coi (Zuannin) v. Colla
De Waard M. C. 78
De Witt J. 94
Dicearco 158
Dickson L. E. 80
Dini U. 67, 83, 189, 237, 241, 250, 253
Diocle 199
Diofanto 18, 23, 25, 26
Dirichlet G. 83, 214, 220, 222, 225, 238, 239
Donati D. 118
D'Ovidio E. 81, 288
Drach J. 80
Du Bois Reymond P. 83, 147, 245
Duhem P. 92
Dupin C. O. 232, 233, 264, 369
Dürer A. 30, 159
Du Séjour D. 81

Edgeworth F. Y. 106, 107
Einstein A. 102, 135, 307
Eneström G. 73, 269
Engel F. 231, 232
Enriques F. 16, 60, 71, 73, 74, 75, 78, 99, 100, 122, 134, 135, 150, 190, 191, 192, 199, 203, 241, 244, 248, 266, 268, 270, 276, 277, 287, 289, 292, 293, 295, 301, 302, 304, 305, 306, 307, 310, 319.
Enriques-Campedelli 294
Enriques e Chisini 211, 266, 280, 294
Enriques-Conforto 294
Enriques-De Santillana 9, 71, 100, 112, 191
Enriques P. 105
Epicuro 161
Epstein P. 309
Eraclito 119
Eratostene 25, 45
Erodoto 7
Erone 18, 25, 28, 77, 112
Euclide 14, 16, 17, 25, 26, 27, 29, 36, 44, 51, 61, 70, 74, 127, 186, 187, 190, 191, 201, 256, 277, 296, 297, 298, 300
Eudemo 11
Eudosso 12, 14, 15
Eulero L. 37, 60, 66, 79, 82, 114, 115, 147, 152, 196, 198, 208, 210, 211, 216, 222, 238, 239, 246, 251, 278, 312.

(di) Fagnano (de' Toschi) G. C. 208
Fano G. 81, 301
Fantappiè L. 254
Fehr H. 188, 319
Feldmann W. M 104
Fermat P. 29, 43, 44, 45, 52, 55, 56, 78, 94, 238, 257
Ferrari L. 35, 39, 206
Ferraris Galileo 116
Férussac 201
Festa N. 77
Fibonacci (v. Leonardo Pisano)
Fiedler S. 81
Filolao 11
Fisher Irving R. A. 104, 106
Forsyth A. R. 215
Forti U. 60, 78
Fourier J. B. 91, 197, 220, 239, 296
Fourneyron B. 115
Fraenkel A. 244
Frajese A. 116
Franceschi Piero (detto della Francesca) 30
Francis J. B. 115
Frank 84
Franklin B. 312
Fredholm E. I. 253, 254
Fresnel A. J. 90
Fricke R. 80, 215, 227
Friedlein G. 71, 74, 77

Fröbel F. 185
Fubini G. 227, 234
Fuchs L. 226, 227, 228

Galilei Galileo 31, 47, 48, 49, 51, 52, 56, 57, 59, 64, 65, 88, 89, 94, 95, 102, 103, 109, 121, 136, 137, 139, 142, 152, 170, 177, 179, 190, 311
Galois E. 79, 202, 203, 204, 205, 207
Galton F. 106, 107
Gandz S. 23
Gassendi P. 88, 312
Gauss C. F. 38, 40, 105, 106, 107, 134, 152, 196, 197, 198, 199, 203, 210, 211, 216, 222, 224, 233, 237, 270, 275, 297, 298, 299, 304, 305
Geber 26
Geiser 216
Gemino 16, 127
Genocchi A. 83, 237, 289
Gentile G. 188
Geppert H. 295
Gerberto 21, 22, 77
Gergonne J. D. 266, 267, 268, 272, 279, 315
Gerhardt C. I. 78
Gerono 315
Ghiberti L. 159
Giamblico 77
Gibbs W. 103
Gigli D. 71
Gini C. 107
Ginsburg I. 73
Giovanni di Palermo 28
Girard A. 38, 39, 43
Giraud G. 227
Göpel 221
Gonseth F. 192
Gordan P. 79
Goudin M. B. 81
Grace J. H. 79
Grassmann H. 276, 287, 288.
Green G. 90
Guccia G. B. 318
Gudermann 222
Guidobaldo dal Monte 31, 256
Guldino P. 47
Günther S. 70, 71
Guttmann M. 77

Hadamard J. 84, 227, 248, 254
Halphen F. H. 288
Hankel H. 276, 277
Hansteen Ch. 197
Harnack A. 82
Harriot T. 42, 43
Harun (al) Raschid 25
Hasse H. 80
Heath T. 16, 71, 75, 76
Heegard 225
Hegel K. F. 128, 131, 132, 172, 242
Heiberg J. L, 45, 75, 76, 77
Heine H. E. 67
Helmholtz H. 91, 305
Hennebique F. 111
Henry C. 78
Herbart J. F. 137, 287
Hermite C. 146, 214, 226, 316
Hertz H. 93, 98, 101, 117, 124
Hesse O. 81, 281
Hilbert D. 84, 248, 253, 254, 302, 304
Hobson E. W. 84
Hoche 77
Hölder O. 191
Hooke R. 312
Horsley S. 78, 80
Hudde J. 42, 43, 57
Hultsch F. 77
Humboldt A. 164, 273
Hume D. 132, 242
Huygens C. 88, 90, 94, 177

Ipparco 18

Ippocrate di Chio 11, 12, 77, 169, 170
Ippodamo 158
Isidoro di Siviglia 21

Jacobi C. G. 79, 83, 182, 197, 210, 211, 212, 217, 219, 220, 221, 223, 247, 270, 271, 273, 280, 287, 316
Jacoli 52
Jevons Stanley 106, 107
Johannes W. 104
Jordan C. 67, 79, 83. 204, 232, 240, 241, 288
Joule J. P. 91
Jourdain T. 192
Jule G. U. 104

Kant I 132, 133, 134, 135, 148, 242, 298, 304, 305, 306
Kaplan V. 115
(Al) Karkhi (Karagi) 26, 77
Kästner A. G. 69
Kékulé von Stradonitz F. A. 92
Kennelly 117
Keplero J. 31, 43, 47, 48, 51, 100, 156, 256
(Al) Khuwarizmi 25, 26, 27, 77
Kiepert L. 83
Kirchhoff G. R 117
Klein F. 72, 140, 181, 187, 189, 210, 215, 220, 222, 226, 227, 229, 232, 276, 277, 284, 288, 290, 303, 304, 311, 316
Kliem F. 75
Kneser 248
Koebe P. 227
Königsberger 210
Kötter 284
Kowalewsky S. 67, 246
Krazer A. 198, 215
Kronecker L. 316

Lacroix S. F. 82, 189
Lagrange G. L. 54, 66, 79, 82, 90, 96, 152, 179, 196, 200, 213, 214, 217, 220, 222, 223, 232, 235, 237, 246, 251, 280, 287, 296, 312
Laguerre E. 269, 303
Laisant C. A. 319
Lalesco T. 254
Lambert J. H. 258, 297
Laplace S. 66, 90, 95, 101, 159, 211, 296
Larmor J. 102, 317
La Tour (Gaultier) 263
Laurent P. A. 214
Lazzeri G. 319
Lebesgue H. 241
Lefschetz S. 225, 295
Legendre A. M. 186, 187, 197, 208, 217, 247, 296, 297
Leibniz G. W. 13, 38, 52, 59, 60, 62, 63, 78, 79, 82, 122, 126, 128, 140, 141, 207, 210, 238, 242, 312
Leonardo da Vinci 30, 113, 159, 186
Leonardo Pisano (Fibonacci) 27, 28, 36, 78, 186
Le Poivre 258
Levi Beppo 80
Levi - Civita T. 233, 253, 308
Levy P. 254
L' Huilier S. 66, 271
Libri G. 69
Lie Sophus 179, 228, 229, 230, 231, 232, 270
Lindemann G. 81
Liouville J. 203, 253, 316
Lisippo 158
Lobatschewsky N. Y. 134, 297, 298, 299, 300, 302, 303, 304, 307
Locke J. 132, 242
Lodge O. J. 117
Lorentz H. A. 102

Lorenz H. 115, 116
Lorenzetti A. 30
Loria G. 73, 78
Lowe 317
Lucrezio 123
Lugli A. 319
Lullo Raimondo 141
Lüroth 277
Lutero M. 183

Macfarlane A. 310
Mach E. 91, 133, 135
Mac Laurin G. 63, 81, 82, 208, 258, 278, 279
Mac Leod 104
Magrini S. 78
Malfatti G. 201
Malpighi M. 103
Malthus T. R. 104
(al) Mamun 25
Marciano Capella 10
Marconi G. 117, 124
Marre A. 78
Marshall A. 107
Martin R. 104
Masaccio 158
Matteucci C. 318
Matthiessen L. 72
Maurolico F. 47
Maxwell Clerk J. 91, 93, 94, 95, 101, 102, 117, 124, 135
Mayer R. 91
Mayländer 314
Mendel G. 105
Mendeleieff D. 124
Menecmo 17
Menelao 77
Menge H. 74
Mengoli P. 62, 237
Mersenne M. 312
Merz J. T. 191
Messedaglia A. 104
Méray C. L. 67
Meyer F. 79
Michelson A. 102
Miller G. A. 80
(v.) Mises 84
Mittag - Leffler G. 317
Möbius A. F. 270, 271, 272, 274, 275, 277, 278
Moigno M. 82, 242
Mondeux 174
Monge G. 170, 232, 233, 235, 255, 258, 259, 262, 268, 269, 270, 272, 296, 315
Monti V. 113, 173
Montucla J. E. 69
Morera G. 213
Mouy T. 89
Müller F. 73

Nasir - Eddin 26, 77
Navier L. 90
Naville A. 192
Nemorario (Giordano) 28, 29, 78
Nepero J. (Napier) 40, 41, 43, 64
Netto E. 80
Neugebauer O. 7, 70, 73
Neumann C. 253, 316
Nevanlinna R. 84
Newton I. 39, 40, 52, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 78, 79, 80, 82, 89, 91, 99, 100, 102, 133, 152, 175, 176, 190, 195, 200, 207, 258, 261, 278, 312
Nicomaco 18, 29, 77
Nicomede 199
Nöther M. 226, 283, 284, 286, 287, 290, 292, 295
Novi G. 80
Nunes Pedro 63

Olschki L. 159, 192
Omar Khayyam 27, 77

Oresme N. 29, 44, 78
Origene 121
Osgood W. F. 84
Ostrogradsky M. V. 211
Ostwald N. 91, 133, 183

Pacinotti A. 110
Paciolo Luca 26, 28, 33, 78, 186
Pahl 192
Painlevé P. 99, 226, 228
Panton A. W. 79
Pappo 47, 77, 246
Pareto V. 106, 107, 108
Parmenide 10, 87, 123, 129
Pascal B. 51, 52, 89, 94, 170, 178, 215, 241, 256, 257, 258, 264, 266, 273, 309, 312
Pasch M. 268, 277
Pasteur L. 316.
Peano G. 67, 83, 237, 240
Pearson K. 106
Peckham G. 30
Peirce Santiago 134
Péletier J. 16, 75
Perès J. 254
Perron O. 80, 191
Pestalozzi G. E. 185, 273
Picard E. 84, 100, 101, 226, 228, 230, 231, 294, 316
Pieri U. 276
Piero della Francesca 186
Pierrot 202
Pincherle S. 80, 254, 319
Piria R. 318
Pitagora 9, 11, 119, 120
Planck Max 102
Platone 11, 12, 13, 119, 120, 123, 124, 126, 128, 129, 130, 136, 139, 146, 155, 175, 181, 185
Platone Tiburtino 77
Plotino 130, 145
Plücker J. 81, 232, 265, 267, 270, 271, 272, 274, 277, 278, 279, 281, 285, 288
Plutarco 175
Poggendorff J. C. 73
Poincaré E. 152, 176, 179, 182, 191, 225, 226, 227, 228, 306
Poisson S. D. 90, 202
Policleto 158
Poncelet V. 115, 116, 232, 257, 259, 261, 262, 265, 266, 267, 268, 269, 273, 275, 277, 278, 279, 280, 293, 303
Posidonio 127
Prasil 115
Predella P. 291
Proclo 11, 16, 18
Protagora 12, 130
Puiseux V. A. 214
Pupin 117

Recorde R 42
Regiomontano Johannes Müller 78
Reichel 116
Reinhardt C. 277
Reye T. 276, 281
Revessi G. 117
Ricardo D. 108
Ricci G. 80, 233
Rickert W. 192
Riebesell P. 104
Riemann B. 67, 83, 84, 152, 179, 180, 210, 221, 222, 223, 224, 225, 233, 237, 281, 282, 284, 285, 286, 287, 288, 291, 301, 302, 303, 305
(de) Roberval-Gilles Personne 52, 57, 177, 312
Robin C. 98
Roch 286, 291
Rome A. 77
Rosenblatt A. 295

Rosenhain 221
Rudio F. 77, 198
Ruffini P. 39, 200, 201, 202, 207
Rufini E. 17, 76
Russell B. 117, 141

Saccheri G. 127, 297
Salmon G. 79, 81, 281, 288
Sarton G. 73
Savasorda 26, 28, 77
Schäfli 288
Scheffer G. 231
Schiaparelli G. 167
Schlosser J. 192
Schmidt W. 77
Schröter 274
Scoto Erigena 21
Schweikart 294, 298, 305
Scorza G. 80, 81
Segner J. A. 114
Segre C. 152, 234, 269, 270, 274, 276, 277, 284, 288, 290, 291, 292, 295
Sennert D. 88
Senofane 119
Sergescu P. 310
Serret J. A. 79, 82
Severi F. 80, 189, 277, 294, 295
Seydewitz 276
Simart G. 294
Simon M. 16, 75
Singh A. N. 23
Smith A. 108, 171
Snellio W. 64, 266
Socrate 128
Sonine 253
Spencer H. 166
Spinoza B. 122, 125, 128
Stäckel P. 198
Staudt C. 189, 263, 265, 266, 270, 274, 275, 276, 277, 283, 293
Stegemann M. 83
Steiner J. 148, 216, 264, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 281, 283, 290
Steinitz E. 80
Steinmetz 117
Stenkel 73
Stern M. A. 222
Stevin S. 40, 47
Stifel M. 40, 43, 287
Stirling J. 82
Struve 8
Stumpf 137
Sturm C. H. 82
Suter H. 71
Sverdrup 216
Sylow P. L. M. 210, 219
Sylvester J. J. 280, 281, 288, 317

Talete 8, 9
Tannery J. 80, 83
Tannery P. 70, 76, 78, 167
Tartaglia N. 16, 33, 34, 35, 37, 39, 75
Taylor B. 63, 82, 213, 239, 246, 251, 257
Teeteto 13
Teodoro da Tripoli 77
Teone d'Alessandria 18, 77
Teone Smirneo 16
Terquem O. 265, 315
Terracini A. 81
Thomson W. (Lord Kelvin) 92, 102
Timerding H. E. 192, 310
Todhunter 16, 83
Toeplitz 73
Tolomeo (Claudio) 18, 25, 77
Tommaso d'Aquino 131
Tonelli L. 241, 248, 319
Torricelli E. 49, 51, 52, 57, 59, 78, 311

Tortolini B. 318
Tropfke J. 71

Uccello Paolo 30, 159

Young A. 79

Vacca G. 27, 35
Vailati G. 41
Valerio Luca 47
Valéry P. 159
Vallicrosa J. 77
Valson 219
Van der Waerden B. L. 80
Van Roomen Adriano (v. Adriano Romano)
Vasari G. 30, 186
Vassura G. 78
Ver Eecke P. 75, 76, 77
Veblen 225
Veronese G. 284, 288, 289, 290, 292, 304
Vessiot 231
Vico G. B. 176
Vieta F. 37, 38, 39, 42, 48, 210.
Vitellione (v. Witelo)
Vitruvio 159
Vivanti G. 50, 71, 245, 254
Viviani V. 311
Voltaire (F. M. Arouet de) 159
Volterra V. 100, 104, 105, 203, 227, 237, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254
Voss A. 191

Wallis J. 38, 54, 78, 79, 210, 296, 311
Walras 107
Weber Ed. 103, 104
Weber H. 80, 84
Weber W. E. 222
Weierstrass K. 67, 83, 180, 210, 214, 221, 222, 223, 224, 226, 237, 240, 247, 291, 316
Weissenborn 77
Weldon 106
Wessel C. 38, 210
Weyl H. 307, 308
Whittaker 314
Widmann 42
Wieleitner H. 10, 192
Wilkins 311
Windelband W. 192
Wirtinger 215
Witelo 30, 256
Wolffing 311
Wollaston 92
Wurtz 92

Zamberti 16, 75
Zariski O. 238, 295
Zenodoro 18, 246
Zenone d' Elea 10, 12, 51, 185
Zeuner G. 114
Zeuthen H. G. 22, 44, 71, 76, 176, 277

INDICE SOMMARIO

Libro Primo

L' EVOLUZIONE DELLE MATEMATICHE DALL' ANTICHITÀ AL SECOLO XVIII

Prefazione . . . . . pag. 1

Capitolo I. - *Le Matematiche nell' antichità.*

1. Le Matematiche preelleniche . . . . . pag. 7
2. Le origini delle Matematiche presso i Greci . . . . » 8
3. Inizii dell' Aritmetica e della Geometria . . . . . » 9
4. Critica dei principii . . . . . » 11
5. Le opere classiche: Euclide . . . . . » 14
6. Archimede ed Apollonio . . . . . » 16
7. Le Matematiche ellenistiche . . . . . » 17
8. Decadenza . . . . . » 18

Capitolo II. - *I nuovi motivi delle Matematiche nel Medio Evo.*

9. Le Matematiche nell' alto Medio Evo . . . . . pag. 21
10. Matematiche indiane . . . . . » 22
11. Matematiche arabe . . . . . » 24
12. Fibonacci . . . . . » 27
13. Le Matematiche nei circoli della cultura europea durante i secoli XIII-XIV . . . . . » 28
14. Il Rinascimento . . . . . » 30

Capitolo III. - *Le Matematiche moderne.*

15. Gli Algebristi italiani del Cinquecento . . . . . pag. 33
16. Le equazioni algebriche e gli immaginari . . . . . » 36
17. Sviluppi dell' Algebra . . . . . » 38
18. Calcolo numerico e logaritmi . . . . . » 40
19. Notazioni . . . . . » 41

20. Geometria analitica . . . . . pag. 43
21. La Statica e le origini del calcolo integrale . . . . . » 45
22. Keplero . . . . . » 47
23. Cavalieri . . . . . » 48
24. Integrazioni di Torricelli, Fermat, Pascal . . . . . » 52
25. Wallis . . . . . » 54
26. Il problema delle tangenti e le origini del calcolo differenziale . . . . . » 55
27. La derivata come velocità . . . . . » 56
28. Integrazione e derivazione come operazioni inverse l'una dell'altra . . . . . » 57
29. Leibniz e Newton . . . . . » 59
30. I due indirizzi del calcolo infinitesimale . . . . . » 62
31. Equazioni differenziali . . . . . » 63
32. Equazioni e sistemi d'equazioni differenziali d'ordine superiore . . . . . » 65
33. Critica dei principii del Calcolo . . . . . » 66

CAPITOLO IV. - *Letteratura matematica.*

34. Le storie . . . . . pag. 69
35. Riviste storiche e guide . . . . . » 72
36. Opere di classici: antichità . . . . . » 74
37. Classici del Medioevo . . . . . » 77
38. Classici dei secoli XVI e XVII . . . . . » 78
39. Trattati d'Algebra . . . . . » 79
40. Trattati di Geometria analitica . . . . . » 80
41. Trattati di calcolo infinitesimale . . . . . » 82
42. Trattati di analisi . . . . . » 84

LIBRO SECONDO

LE MATEMATICHE NELLA CULTURA

CAPITOLO I. - *Le Matematiche nel quadro generale delle scienze.*

1. Meccanicismo . . . . . pag. 87
2. Spiegazione meccanica dei fenomeni fisici . . . . . » 89
3. Positivismo . . . . . » 91
4. Contrasto di mentalità . . . . . » 92
5. Calcolo delle probabilità . . . . . » 93

6. Il secondo principio della Termodinamica e i fenomeni irreversibili . . . . . pag. 95
7. Isteresi e meccanica ereditaria . . . . . » 97
8. Le Matematiche nel processo induttivo e unificativo della scienza . . . . . » 100
9. Superamento del meccanicismo . . . . . » 101
10. Matematizzazione delle scienze: applicazioni alle scienze della vita . . . . . » 102
11. Biometria e Statistica . . . . . » 105
12. Economia . . . . . » 106

CAPITOLO II. – *Matematiche e tecnica.*

13. Scienza e tecnica . . . . . pag. 109
14. Statica . . . . . » 109
15. Resistenza dei materiali . . . . . » 110
16. Macchine a vapore. . . . . » 112
17. Motori a scoppio . . . . . » 112
18. Forma dei veicoli . . . . . » 113
19. Motori idraulici. . . . . » 114
20. Elettrotecnica . . . . . » 116
21. Radiotecnica . . . . . » 117
22. Conclusione . . . . . » 117

CAPITOLO III. – *Matematiche e filosofia.*

23. Motivi matematici nella speculazione filosofica: filosofia antica . . . . . pag. 119
24. I grandi sistemi metafisici moderni . . . . . » 121
25. Il razionalismo . . . . . » 122
26. Il realismo dialettico. . . . . » 124
27. Esistenza per definizione e argomento ontologico . . » 126
28. L'infinito . . . . . » 128
29. Le Matematiche e la critica di Kant. . . . . » 132
30. La filosofia positiva e il pragmatismo . . . . . » 133
31. Nuovi sviluppi della teoria della conoscenza. . . . » 134
32. Conclusione . . . . . » 136

CAPITOLO IV. – *Che cosa sono le Matematiche.*

33. Significato degli enti matematici . . . . . pag. 139
34. Definizioni delle matematiche . . . . . » 140
35. Definizioni, assiomi e postulati . . . . . » 142
36. Le Matematiche come tautologia . . . . . » 144

37. Le Matematiche come scienze naturali . . . . . pag. 145
38. Logica dell'intelletto e logica della ragione . . . . . » 148
39. Giudizi di valore . . . . . » 150

CAPITOLO V. - *Matematiche e arte.*

40. Le Matematiche come arte . . . . . pag. 155
41. Il senso matematico nell'arte classica . . . . . » 156
42. Influenze matematiche nell'arte e nella letteratura . » 158

CAPITOLO VI. - *Matematiche e storia.*

43. L'ideale della conoscenza matematica . . . . . pag. 161
44. Determinismo e caso nella storia . . . . . » 162
45. Storia naturale . . . . . » 163
46. L'ideale della conoscenza storica . . . . . » 165
47. Matematismo e storicismo . . . . . » 165

CAPITOLO VII. - *Psicologia delle matematiche.*

48. Mentalità matematica . . . . . pag. 169
49. Logica e intuizione. Analisi e sintesi . . . . . » 173
50. Difetti professionali . . . . . » 175
51. Diverse attitudini del pensiero matematico . . . . . » 178
52. La scoperta . . . . . » 181
53. L'insegnamento . . . . . » 184

LIBRO TERZO

SU ALCUNI INDIRIZZI DELLE MATEMATICHE NEL SECOLO XIX

CAPITOLO I. - *Problemi e sviluppi dell'analisi qualitativa.*

1. L'evoluzione delle matematiche pure . . . . . pag. 195
2. Analisi qualitativa: teoria delle equazioni algebriche » 198
3. Teoria delle funzioni: funzioni ellittiche . . . . . » 207
4. Abel e Cauchy . . . . . » 215
5. Jacobi . . . . . » 220
6. Riemann e Weierstrass . . . . . » 221
7. Integrazione qualitativa delle equazioni differenziali » 226
8. Gruppi continui di trasformazioni di Sophus Lie . . » 228
9. Geometria differenziale . . . . . » 231

CAPITOLO II. - *La critica dei principii e la teoria delle funzioni di variabile reale.*

10 Critica dei principii dell'analisi infinitesimale . . . pag. 235
11. Il concetto di funzione . . . . . » 238
12. L'infinito attuale e la teoria degli insiemi . . . . » 241
13. Teoremi d'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali e calcolo delle variazioni . . . . . » 245
14. Funzionali ed equazioni integrali . . . . . » 248

CAPITOLO III. - *Gli sviluppi della geometria proiettiva e algebrica.*

15. Le origini della geometria proiettiva . . . . . pag. 255
16. La geometria proiettiva e il principio di continuità di Poncelet . . . . . » 259
17. Principio di dualità e principio di trasporto: influenza sulla logica . . . . . » 266
18. Sviluppi della geometria nella scuola francese . . . » 268
19. La geometria proiettiva nella scuola tedesca. . . . » 270
20. Sviluppi della geometria algebrica. . . . . » 278
21. Luigi Cremona e la scuola geometrica italiana . . . » 281
22. Clebsch e Nöther . . . . . » 284
23. Iperspazi . . . . . » 287
24. Evoluzioni ulteriori della geometria delle trasformazioni razionali . . . . . » 292
25. Geometria non-euclidea . . . . . » 296
26. La critica dei principii della geometria nell'indirizzo metrico-differenziale di Riemann . . . . . » 301
27. Le metrico-proiettive di Cayley-Klein . . . . . » 303
28. Il problema dello spazio . . . . . » 304

CAPITOLO IV. - *Letteratura matematica.*

29. Enciclopedie e rapporti . . . . . pag. 309
30. Le Accademie . . . . . » 311
31. Le principali riviste matematiche del mondo . . . » 314

INDICE DEI NOMI . . . . . pag. 323
INDICE SOMMARIO . . . . . » 333

CSS COLLANA DI STORIA DELLA SCIENZA

CSS1 *Enriques, De Santillana* Compendio di storia del pensiero scientifico
CSS2 *Asimov* Breve storia della biologia
CSS3 *Asimov* Breve storia della chimica
CSS4 *Beyerchen* Gli scienziati sotto Hitler
CSS5 *Darwin* L'origine delle specie
CSS6 *Enriques* Le matematiche nella storia e nella cultura